# Chapitre 1. Généralités sur l'optimisation

## 1. Historique

L'optimisation est une discipline mathématique qui, bien qu'omniprésente depuis les origines, a pleinement pris son essor au cours du XXe siècle d'une part sous la stimulation du développement des sciences de l'industrie et de la planification, telles l'économie, la gestion, etc..., et des sciences appliquées aux technologies naissantes, comme l'automatique, le traitement du signal, etc..., et d'autre part grâce au développement de l'informatique qui a rendu efficiente ses méthodes algorithmiques jusque là impraticables.

Optimiser c'est choisir parmi plusieurs possibilités celle qui répond le mieux à certains critères. En ce sens il n'est pas de science ni même de domaine d'activité qui ne soit confronté à un problème d'optimisation. L'optimisation, et plus généralement la Recherche opérationnelle, intervient dés-lors pour appliquer l'outil mathématique à cette résolution, si tant est que le problème soit formalisable mathématiquement.

Les premiers problèmes d'optimisation auraient été formulés par le mathématicien Euclide, au IIIe siècle. Trois siècles plus tard Héron d'Alexandrie énonce le principe du plus court chemin en optique. Au XVIIe siècle l'apparition du calcul différentiel sous l'égide de Newton et de Leibnitz, et la théorie newtonienne de la mécanique entraînent l'invention des premières techniques d'optimisation, dont la méthode itérative de Newton pour chercher les extrema locaux d'une fonction. Durant le XVIIIe siècle Euler et Lagrange développent le calcul variationnel, branche de l'analyse fonctionnelle dont le but est de trouver une application répondant au mieux à certains critères. Ce dernier invente une technique fondamentale en optimisation connue aujourd'hui sous le nom de multiplicateurs de Lagrange. Au XIXe siècle l'industrialisation en Europe voit les économistes présenter un intérêt croissant pour les mathématiques et mettre en place des modèles économiques qu'il convient alors d'optimiser.

Au XXe siècle ce furent des aspects contrastés qui convergèrent vers le développement de l'optimisation, ou encore de la programmation mathématique et de la recherche opérationnelle. En Union Soviétique la planification fut une conséquence de la pensée communiste et se concrétisa par des plan quinquennaux ou encore gosplans, tandis qu'aux Etats-Unis le développement du capitalisme accoucha de la recherche opérationnelle. Mais c'est avec l'apparition de l'informatique dans l'après-guerre que les techniques d'optimisation prirent toute leur ampleur et s'appliquèrent dans tous les champs d'activité.

L'un des premiers succès fût la méthode du simplexe s'appliquant en programmation linéaire, qui fut inventée en 1947 par le mathématicien américain Georges Dantzig. De par son efficacité pratique elle est devenue l'un des algorithmes les plus utilisés de l'histoire des mathématiques appliquées. Dantzig travaillait alors comme conseiller pour l'US air force sur la mécanisation des processus de planification, dans le but de les résoudre à l'aide de machines à cartes perforées. Notons d'ailleurs que le terme de programmation (mathématiques), synonyme d'optimisation, n'a rien à voir avec le sens qu'on lui donne en informatique, mais provient en fait du jargon militaire où il signifie planification.

C'est quelques années auparavant, peu avant la seconde guerre mondiale, que la programmation linéaire avait été développée par Leonid Kantorovish, professeur de mathématiques à l'université de Leningrad, qui avait été chargé par le gouvernement soviétique en 1938 d'optimiser la production industrielle de contreplaqué. Il y trouva des possibilités d'optimisation de la production économique soviétique. Il effectua par ailleurs de nombreux travaux en optimisation continue, dont des conditions de convergence pour la méthode de Newton. Ses théories ne furent publiées qu'après l'ère stalinienne ; il faillit être emprisonné deux fois et ne fut sauvé que pour son implication dans le programme nucléaire soviétique ; en effet ses travaux l'avaient conduit indirectement à réintroduire la théorie de l'utilité marginale qui s'oppose à la théorie économique marxiste ; ils ont trouvé leurs applications quelques années plus tard dans la libéralisation de l'´economie soviétique. Conjointement avec T. Koopmans il obtint le prix Nobel d'économie en 1975 "for their contributions to the theory of optimum allocation of ressources".

De nos jours l'optimisation et plus généralement la recherche opérationnelle, reste un domaine fécond de la recherche en mathématiques qui bénéficie d'importants financements provenant aussi bien du domaine public que du domaine privé, et dont les retombées s'appliquent dans tous les domaines d'activité humaine se prêtant à la modélisation mathématique.

## 2. Définition d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation se définit comme la recherche du minimum ou du maximum (de l'optimum donc) d'une fonction donnée. On peut aussi trouver des problèmes d'optimisation pour lesquels les variables de la fonction à optimiser sont contraintes d'évoluer dans une certaine partie de l'espace de recherche. Dans ce cas, on a une forme particulière de ce que l'on appelle un problème d'optimisation sous contraintes.
Mathématiquement parlant, un problème d'optimisation se présentera sous la forme suivante :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Minimiser la fonction** | $f(x)$ **avec** | $x \in \mathbf{R}^n$ | |
| sous les contraintes | $c_i(x) = 0$ | $i = 1, \ldots, m$ | (contraintes d'égalité) |
| | $d_j(x) \geq 0$ | $j = 1, \ldots, p$ | (contraintes d'inégalité) |

$f(x)$ est appelée fonction de coût, fonction objectif, ou critère d'optimisation.

Fréquemment, les fonctions à minimiser correspondent à une énergie, à un risque ou à un coût, alors que les fonctions à maximiser correspondent à un profit, à une performance ou à un rendement.

## 3. Classification des problèmes d'optimisation

On peut classer les différents problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans la vie courante en fonction de leurs caractéristiques :

### 3.1. Suivant les propriétés de la fonction de coût

– Fonction d'une seule variable

– Fonction linéaire

– Somme de carrés de fonctions linéaires

– Fonction quadratique

– Fonction convexe

– Somme de carrés de fonctions non linéaires

– Fonction non linéaire continûment dérivable

– Fonction non linéaire non dérivable

### 3.2. Suivant les propriétés des contraintes

– Pas de contraintes

– Fonctions linéaires

– Fonctions convexes

– Fonctions non linéaires continûment dérivables

– Fonctions non linéaires non dérivables

## 4. Exemples de problèmes d'optimisation

### 4.1. Minimisation des coûts dans la fabrication de boites cylindriques

Optimisation à une variable : Dans la fabrication de boites de conserve cylindriques on minimise les couts de matière première en cherchant le cylindre de surface minimale à volume constant.

Considérons un cylindre, donné par sa hauteur $h$ et le rayon $r$ de sa base.

Le volume est : $\pi r^2 h = K$ = constante.

L'aire est : $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{r,h} 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$\pi r^2 h = K$$
$$r, h > 0$$

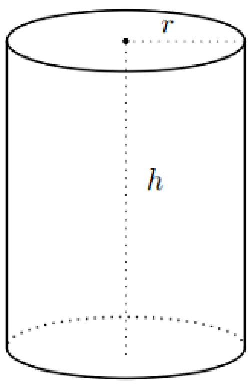


**Figure 1.1.** Boite cylindrique

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

$$h = \frac{K}{\pi r^2} \implies \text{Aire}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2K}{r}$$

$$\boxed{\min_{r>0} A(r) = \pi r^2 + \frac{K}{r}}$$

On étudie les variations de $A(r)$ :

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{K}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - K}{r^2} \implies A'(r) \geqslant 0 \iff r \geqslant \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$$

| $r$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $A$ | | $\searrow$ | $A_{\min}$ | $\nearrow$ | |

Le minimum est :

$$\boxed{r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}}$$

Alors $h_{\min} = \frac{K}{\pi^3 \frac{K^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{4K}{\pi}} = 2r_{\min}$

$$\boxed{h_{\min} = 2r_{\min}}$$

$$\text{Aire}_{\min} = 2\pi r_{\min}^2 + 2\pi r_{\min} h_{\min} = 2\pi \sqrt[3]{\frac{K^2}{4\pi^2}} + 4\pi \sqrt[3]{\frac{K^2}{4\pi^2}} = 3\sqrt[3]{\pi K^2}$$

$$\boxed{\text{Aire}_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi K^2}}\ .$$

### 4.2. Production optimale d'une fonderie

<u>Optimisation sur plusieurs variables</u> : Une fonderie fabrique 3 qualités de bronze à partir de cuivre et d'étain, en proportions variables. Elle dispose d'une quantité mensuelle de 65 tonnes de cuivre et de 5 tonnes d'étain.

| Qualité | Bénéfice brut (K€/t) | % cuivre | % étain |
|---|---|---|---|
| A | 2 | 90 | 10 |
| B | 1.6 | 93 | 7 |
| C | 1.8 | 95 | 5 |

**Tableau 1.1.** Problème de ravitaillement

Quelle production maximise le bénéfice mensuel ?

**Notons :**

– $x$ la quantité mensuelle produite (en tonne) de bronze de qualité A.

– $y$ la quantité mensuelle produite (en tonne) de bronze de qualité B.

– $z$ la quantité mensuelle produite (en tonne) de bronze de qualité C.

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z \tag{1.1}$$

sous les contraintes inégalitaires :

$$\begin{aligned} 90x + 93y + 95z &\leq 6500 \\ 10x + 7y + 5z &\leq 500 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Comment le résoudre ? Toutes les fonctions étant linéaires, on est dans le cadre de la programmation linéaire (Chapitre 2).

### 4.3. Problème de transport

Optimisation sur plusieurs variables : On considère un problème de ravitaillement ; il fait partie d'une large classe de problème (amplement étudiée que ce soit en optimisation continue ou en optimisation combinatoire, et que l'on sait résoudre efficacement) très utile dans la pratique, plus généralement appelé problème de transport (Chapitre 4).

On souhaite ravitailler en carburant 3 sites à partir de 2 dépôts de capacité limitée. L'acheminement en carburant d'un dépôt à un site a un coût unitaire. Le tableau suivant résume chacun de ces coûts ainsi que la demande de chaque site, et le stock disponible dans chaque dépôt.

| | site 1 | site 2 | site 3 | diponibilité |
|---|---|---|---|---|
| dépôt 1 | 10 | 12 | 9 | 300 |
| dépôt 2 | 11 | 11 | 10 | 450 |
| demande | 200 | 250 | 250 | |

**Tableau 1.2.** Problème de ravitaillement

Notons $x_{ij}$ , $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ la quantité de carburant (en unité de volume) acheminée du dépôt $i$ au site $j$. Le coût d'acheminement est donné par la fonction coût :

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 10x_{11} + 12x_{12} + 9x_{13} + 11x_{21} + 11x_{22} + 10x_{23} \tag{1.3}$$

qu'il s'agit de minimiser, sous les contraintes :

– Contraintes égalitaires provenant de la demande :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 200 \\ x_{12} + x_{22} &= 250 \\ x_{13} + x_{23} &= 250 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Contraintes inégalitaires provenant du stock disponible :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 300 \tag{1.5}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \tag{1.6}$$

– Contraintes de signe : (S) $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$.

Il s'agit encore d'un problème de programmation linéaire.

### 4.4. Régression linéaire

**Optimisation sur plusieurs variables** : On considère un nuage de points $(\mathbf{x}_n)_{n=1,..N}$ dans $\boldsymbol{R}^2$. On cherche la droite affine qui approche le mieux ce nuage de points au sens des moindres carrés. Si l'on note $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$, et $\Delta : y = \alpha x + \beta$, on cherche :

$$\min_{\alpha,\beta\in R} \sum_{i=1}^{N} \|y_i - \alpha x_i - \beta\|^2 \tag{1.7}$$

ce qui équivaut au problème de programmation quadratique :

$$\min_{\alpha,\beta\in R} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha x_i - \beta)^2 \tag{1.8}$$

On verra pourquoi ce problème admet toujours une solution, et l'on retrouvera les formules bien connues de la droite de régression linéaire (Chapitre 7).

### 4.5. Modélisation de données expérimentales

Plus généralement supposons que l'on ait effectué une série de $p$ mesures dépendant d'un paramètre (évolution d'une concentration chimique, ou de toute autre grandeur physique, en fonction du temps, etc...).

| paramètre | $t_1$ | $t_2$ | $\cdots$ | $t_p$ |
|---|---|---|---|---|
| valeur mesurée | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_p$ |

**Tableau 1.3.** Données expérimentales

On souhaite modéliser ces données expérimentales par une certaine application mathématique $F(\alpha 1, \ldots, \alpha_n) : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dépendant de paramètres réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$.

On cherche à déterminer les paramètres pour lesquels les valeurs prises par la fonction aux points $t_1, \ldots, t_p$ collent au mieux aux valeurs mesurées, dans un certain sens, disons par exemple au sens des moindres carrés.

Il s'agit alors du problème d'optimisation :

$$\min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in D} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - F(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)(x_i)\right)^2 \tag{1.9}$$

Ce problème est fondamental en sciences expérimentales.