نظرية المنفعة القياسية (المنفعة الحدية).

- **تمهيد:**

تظهر المشكلة الاقتصادية في أي مجتمع من المجتمعات البشرية عند ممارسة العمليات الخاصة باستخدام الموارد المتاحة، بهدف إشباع الحاجات البشرية ، و هذا ما يعرف بالنشاط الاقتصادي ، و قد أدى تطور المجتمعات الإنسانية إلى تعدد و تنوع الحاجات و الرغبات و تطور طرق إشباعها.
إذن فمشكلة الإنسان تتمثل في التناقض الموجود بين الحاجات الكثيرة و ندرة وسائل إشباعها، و يتم حل هذه المشكلة بوضع سلم للأولويات سواء كان في إطار الدولة ككل أو في إطار الفرد،الذي يقوم بتوزيع دخله على المواد الاستهلاكية حسب الأولوية مع فرضية مسبقة تتمثل في أن الفرد يتميز بالرشادة و العقلانية في استعمال موارده، و ذلك بشكل امثل من اجل إشباع حاجاته، و التي تعبر عن شعور و إحساس داخلي غالبا ما يتميز بالذاتية لأن قياسها ذاتي شخصي، فهي قابلة للإشباع عن طريق الوسيلة ذاتها أو بدائلها.
تهتم نظرية سلوك المستهلك بتفسير و وضع معايير لسوك كل مستهلك عند إقدامه على توزيع الدخل الذي يخصصه للإنفاق على مجموعة من السلع و الخدمات التي يستهلكها خلال فترة زمنية معينة.
و هناك بعض النظريات التي تفسر هذا السلوك و هي:

- نظرية المنفعة القياسية أو نظرية المنفعة الحدية (القياس الكمي و العددي للمنافع المستقلة).
- نظرية المنفعة الترتيبية أو نظرية منحنيات السواء (القياس الترتيبي و التفضيلي للمنافع).

1. المنفعة:

يستهلك الفرد السلع، لكي يشبع حاجاته المختلفة كالحاجة للأكل وغيرها، ويعرف الفيلسوف الإنجليزي "جيرمي بنثام (1780)Jeremy Bentham" المنفعة على أنها ((عبارة عن قوة خفية في الأشياء تستطيع تحقيق الإشباع في زمن معين))، وعليه فالمنفعة هي: مقدار الاستماع والرضى أو الإشباع الذي يتحصل عليه الفرد عندما يستهلك سلعة معينة، أو مجموعة من السلع.
و يتأثر الإشباع بعاملين هما:

- تناسب المنفعة عكسيا مع عدد الوحدات الموجودة من السلعتين بحوزة المستهلك (المنفعة تتناسب طردا مع ندرتها).
- كلما زادت رغبة الفرد في الحصول على سلعة معينة، كلما زادت منفعتها (المنفعة ليست

ثابتة وهي تختلف من شخص لآخر).

2.المنفعة القياسية (المنفعة الحدية):

هي أسلوب تقليدي، يعتمد على فكرة قابلية المنفعة للقياس الكمي والعددي وتصبح في هاته الحالة المنفعة عبارة عن UT (حيث U = Utilité) و(T =Totale)، وتقاس بوحدات قياس تسمى وحدات المنفعة، و هو مصطلح استخدمه جيفونز Stauly Jevons في كتابه عن نظرية الاقتصاد السياسي 1871م.

لقد ظل تحليل المنفعة القياسية هو المرشد الأساسي لسلوك المستهلك وتحديد حجم الطلب لهذا المستهلك وذلك ابتداء من عام 1870م إلي أواخر الثلاثينات.

- **فرضيات هذه النظرية:** - المنفعة قابلة للقياس الكمي والعددي.
  - المنفعة مستقلة أي لا توجد علاقة للسلعة مع السلع الأخرى.
  - المنفعة الحدية للنقود ثابتة، بينما المنافع الحدية للسلع تتناقص بزيادة الكمية.
  - وحدات السلعة متماثلة تماما، كما لا يوجد فاصل زمني بين استهلاك السلع.

3. تعريف و دالة المنفعة الكلية:

3-1- تعريف المنفعة الكلية:

هي مجموع الإشباع الذي يحصل عليه الفرد عندما يستهلك سلعة معينة، أو مجموعة السلع في فترة زمنية معينة ومحددة.

3-2- دالة المنفعة الكلية لسلعتين:

هي عبارة عن العلاقة الرياضية التي تربط بين مستوي الإشباع المتحصل عليه، والكميات المستهلكة من مختلف السلع، فإذا كانت لدينا Y,X هي الكميات المستهلكة من السلعتين (Y,X) وكانت UT هي مقدار المنفعة المتحصل عليها، لاستهلاك السلعتين فلإن دالة المنفعة الكلية لهذا المستهلك هي:

$$\boxed{UT = f(x, y)}$$

مثال : $UT = 2X^2 + 3Y$ $\qquad$ $UT = 3X^2 + 3X.y + 2Y^2$

ودالة المنفعة تتميز بالخصائص التالية:

- دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في مجال تعريفها.

- هي دالة معرفة خلال فترة زمنية معينة، بحيث لا تكون المدة قصيرة، حيث لا تسمح بالإشباع الكامل في الزمن المحدد، كما لا ينبغي أن تكون طويلة بحيث تتغير الأذواق فتتغير بذلك المعطيات.

3-3- دالة المنفعة الكلية لسلعة واحدة :

هي تلك العلاقة بين الإشباع الكلي وكميات السلع للمستهلك، فإذا إفترضنا أن شخص يقوم بإستهلاك كمية معينة من السلعة " X" ، فإن دالة المنفعة الكلية هي :

$$\boxed{UT = f(x)}$$

4. المنفعة الحدية تعريفها ودالتها:

4-1- تعريف المنفعة الحدية:

هي مقدار الزيادة في المنفعة الكلية عندما يزيد استهلاك السلعة بوحدة واحدة.

و يمكن تعريفها أيضا، بأنها مقدار ما يضيفه استهلاك الوحدة الأخيرة من السلعة من منفعة إلى المنفعة الكلية.

4-2- دالة المنفعة الحدية :

دالة المنفعة الحدية هي المشتقة الجزئية الأولى لدالة المنفعة الكلية، و تحسب بالشكل التالي:

$$\boxed{UM_X = f'(X)} \qquad \boxed{UM_X = \frac{\delta UT}{\delta X}}$$

$$\boxed{UM_X = \frac{\Delta UT}{\Delta X} = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(n)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}}}$$

مثال: لتكن لدينا $UT = 2X^{\frac{1}{3}}.Y^{\frac{2}{3}}$

المطلوب: إيجاد المنفعة الحدية UM_X.

لنا

$$UM_X = \frac{\delta UT}{\delta X} = \frac{\delta(2X^{\frac{1}{3}}.Y^{\frac{2}{3}})}{\delta X}$$

$$donc\ \ UM_X = \frac{2}{3}X^{\frac{-2}{3}} \times Y^{\frac{2}{3}}$$

4-3- قانون تناقص المنفعة الحدية:

مع تزايد استهلاك السلعة "X " ، تتزايد المنفعة الحدية إلى أن تصل نقطتها العظمى، وبعد هاته النقطة ، فأن الاستمرار في استهلاك السلعة " X " يؤدي إلي استمرار تناقص المنفعة الحدية في

المجال الموجب إلى أن تصل إلى الصفر (0)، وأي زيادة في استهلاك السلعة X يؤدي إلي تناقص المنفعة الحدية في مجال السالب (-).و بالتالي فان قانون تناقص المنفعة الحدية يبدأ في العمل ابتداء من أعظم قيمة للمنفعة الحدية إلى أن تنعدم.

مثـال:

* بناءا على الجدول التالي.أوجد المنفعة الحدية UM_X .

الكميات المستعملة X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنفعة الكلية UT	0	4	14	20	24	26	26	24	21	17

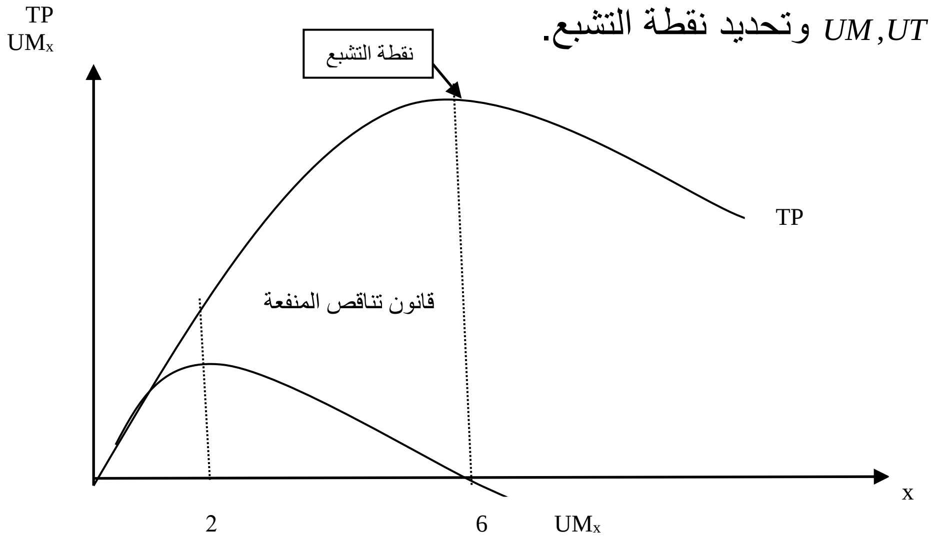
- أوجد المنفعة الحدية UM_X .
- أرسم بيانيا منحنى المنفعة الكلية (UT) . ومنحنى المنفعة الحدية (UM_x) مع تحديد نقطة الإشباع العظمى (نقطة التشبع).

الحـل: إيجاد المنفعة الحدية UM_X :

$$UM_X = \frac{\Delta UT}{\Delta X} = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(x)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}}$$

الكميات المستعملة X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
المنفعة الكلية UT	0	4	14	20	24	26	26	24	21	17
المنفعة الحدية UM	-	4	10	6	4	2	0	-2	-3	-4

- رسم منحنى UM,UT وتحديد نقطة التشبع.



- **شرح المنحنيات:**

1) منحنى الانتاج الكلي TP : - يتزايد في البداية بمعدل متزايد (من x=0 إلى x=2).

- يصل إلى نقطة انعطاف، و هي نقطة التحول من التزايد بمعدل متزايد إلى التزايد بمعدل متناقص (عند x=2).
- يبدأ بعدها بالتزايد بمعدل متناقص (من x=2 إلى x=6).
- ثم يصل الى أعظم قيمة له، أي نقطة التشبع (عند x=6).
- و بعدها يبدأ بالتناقص تماما (من x=6 و ما بعدها).

2) منحنى الانتاج الحدي UM_X :- يتزايد تماما إلى أن يصل إلى نقطته العظمى (عند x=2).

- ثم يبدأ بعدها في التناقص في المجال الموجب(من x=2 إلى x=6).
- ثم ينعدم (عند x=6).
- و بعدها يبدأ بالتناقص في المجال السالب (من x=6 و ما بعدها).

3) العلاقة بين المنفعة الكلية UM والمنفعة الحدية UT :

- عندما تتزايد المنفعة الحدية، تتزايد المنفعة الكلية بمعدل متزايد، بزيادة استهلاك السلعة X .
- عندما يصل منحنى المنفعة الحدية إلي نهايته العظمى يصل منحنى المنفعة الكلية إلى نقطة انعطاف (نقطة التحول من التزايد بمعدل متزايد إلي التزايد بمعدل متناقص).
- عندما يتناقص منحى المنفعة الحدية (في المجال الموجب)، فإن منحنى المنفعة الكلية يتزايد بمعدل متناقص.
- عندما تكون المنفعة الحدية منعدمة ($UM_X = 0$)، تكون المنفعة الكلية UT في قيمتها العظمى(نقطة التشبع أو الإشباع).
- عندما تكون المنفعة الحدية UM_X متناقصة في المجال السالب (-) فإن المنفعة الكلية تتناقص تماما.

مثال 1: إذا كانت دالة المنفعة الكلية لأحد المستهلكين معطاة كالآتي:

$$UT = 2X^2 - X$$

المطلوب:

أوجد المنفعة الحدية لهذه السلعة X .

أوجد المنفعة الحدية والكلية إذا كان: $(X = 5)$.

الحل:

إيجاد دالة المنفعة الحدية UM_X

$$UM_X = \frac{\delta UT}{\delta X} = \frac{\delta(2X^2 - X)}{\delta X}$$

$$donc \quad UM_X = 4X - 1$$

إيجاد قيمة المنفعة الحدية UM و الكلية UT لما $X = 5$

لنا

$$UT = 2(5)^2 - 5 = 45$$

$$donc \quad UT = 45$$

$$UM_x = 4(5) - 1 = 19$$

$$donc \quad UM_x = 19$$

مثال 2: لدينا دالة المنفعة الكلية معطاة بالشكل التالي: $UT = 2X^2.Y$

نفس مطلوب المثال السابق (2) وفي حالة: $(Y = 3, X = 4)$

الحل:

دالة المنفعة الحدية:

$$UM_X = 4X \times Y$$

$$UM_Y = 2X^2$$

$$UM_x = 4(4) \times 3 = 48 \qquad donc \; UM_X = 48$$

$$UM_y = 2(4)^2 = 32 \qquad donc \; UM_y = 32$$

$$UT_{(X,Y)} = 2(4) \times (3) = 96 \qquad donc \; UT_{(X,y)} = 96$$

5. الدخل المخصص للإنفاق ومعادلة الميزانية:

الدخل المخصص للإنفاق هو حجم النقود، الذي يخصصه الفرد للحصول على سلع وخدمات، ويجب أن لا يتجاوز إنفاق هذا المستهلك الدخل النقدي المخصص لذلك، وبناء عليه يمكننا وضع صيغة عامة، يتساوى فيها الدخل النقدي مع مجموع الإنفاق، تسمى هذه الصيغة: معادلة ميزانية المستهلك، والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\boxed{R = P_X \times X + P_Y \times Y + P_Z \times Z + \dots\dots\dots.P_N + N}$$

$$R = P_X \times X + P_Y \times Y$$

حيث R يعبر عن الدخل النقدي المخصص للإنفاق.

X: الكمية المشتراة من السلعةX .

Y: الكمية المشتراة من السلعةY .

P_x : سعر السلعةX .

P_y : سعر السلعةY .

6. توازن المستهلك:

إن هدف المستهلك هو محاولة تعظيم منفعته في حدود الدخل المخصص لذلك (المستهلك العقلاني والرشيد)، وإذا حقق المستهلك هذا الهدف نقول أنه في حالة توازن.

6-1- إيجاد توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة:

يتوازن المستهلك في حالة وجود سلعة واحدة عندما تتساوى المنفعة الحدية التي يكتسبها المستهلك من السلعة مع المنفعة الحدية المضحى بها في سبيل الحصول عليها.

و منه شرطا توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة هما:

- **المنفعة الحدية المكتسبة= المنفعة الحدية المضحى بها.**
- **يحصل الفرد على أقصى فائض منفعة (و ليس على أقصى منفعة).**

أ- **المنفعة الحدية المكتسبة:** و هي المنفعة التي يكتسبها الفرد من استهلاك الوحدة الاخيرة من السلعة. و تحسب كما يلي:

$$UM_X = \frac{\Delta UT}{\Delta X} = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(x)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}}$$

ب- **المنفعة الحدية المضحى بها:** و هي عدد وحدات المنفعة التي يضحي بها المستهلك في سبيل حصوله على وحدة إضافية واحدة من السلعة.و تحسب بالشكل التالي:

المنفعة الحدية المضحى بها= سعر الوحدة من السلعة × المنفعة الحدية للنقود.

$$UM_{\text{المضحىبها}} = P_x.\lambda$$

ج- **المنفعة الحدية الصافية=** المنفعة الحدية المكتسبة- المنفعة الحدية المضحى بها.

د- **المنفعة الكلية الصافية(فائض المستهلك)=** المنفعة الكلية المكتسبة- المنفعة الكلية المضحى بها.

- **مثال:** بافتراض ان احد المستهلكين قدر منفعته الحدية المكتسبة من استهلاك 10 وحدات من سلعة X كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UM_X	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

و أن سعر السلعة X ثابت مقداره 4 وحدات نقدية، اما المنفعة الحدية للنقود فتقدر بـ2 وحدات.

المطلوب:1- تحديد وضع توازن المستهلك.

2- ما هو فائض المستهلك عند وضع التوازن.

الحل:- حساب المنفعة الحدية المضحى بها:

$$UM_{\text{المضحىبها}} = P_x.\lambda = 2\times4=8$$

$$UM_X = \frac{UT_{(n+1)} - UT_{(x)}}{X_{(n+1)} - X_{(n)}} \Leftrightarrow UT_{n+1} = UM_X + UT_n$$

المنفعة الكلية الصافية(فائض المستهلك)= المنفعة الكلية المكتسبة- المنفعة الكلية المضحى بها.

X	UM_X المكتسبة	UM_X المضحى بها	UT المكتسبة	UT المضحى بها	UT الصافية فائض المستهلك
1	10	08	10	08	02
2	09	08	19	16	03
3	08	08	27	24	03
4	07	08	34	32	02

5	06	08	40	40	00
6	05	08	45	48	3-
7	04	08	49	56	7-
8	03	08	52	64	12-
9	02	08	54	72	18-
10	01	08	55	80	25-

من خلال الجدول يتضح أن نقطة توازن المستهلك تكون عندما:

$$UM_{\text{المضحىبها}} = UM_{\text{المكتسبة}} = 8$$

وذلك عندما يستهلك 3 وحدات من السلعة X.

6-2- إيجاد توازن المستهلك في حالة عدة سلع:

أ- إيجاد توازن المستهلك بطريقة شرط توازن المستهلك:

يتحقق توازن المستهلك، عندما ينفق دخله بالطريقة التي يعطي له فيها إنفاق آخر دينار من هذا الدخل على السلع المختلفة نفس المنفعة. وبعبارة أخرى يكون هذا المستهلك في حالة توازن عندما تتساوى المنافع الحدية للسلع منسوبة إلى أسعارها.

و يمكن وضع الصيغة العامة للتوازن كما يلي:

$$\boxed{\frac{UM_X}{P_X}=\frac{UM_Y}{P_Y}=.........=\frac{UM_N}{P_N}.}$$

$$\frac{UM_X}{P_X}=\frac{UM_Y}{P_Y}$$

مثال1:

- ليكن لدينا الجدول التالي:

-فإذا كان: $P_x=2DA$ ، $P_y=1DA$ وكان دخل الفرد $R=12DA$

$\frac{UMy}{Py}$	$\frac{UM_X}{Px}$	UM_y	UM_x	Q_x
11	8	11	16	1
10	7	10	14	2
9	$\boxed{6}$	09	$\boxed{12}$	3
8	5	08	10	4
7	4	07	08	5
$\boxed{6}$	3	$\boxed{6}$	06	6
5	2	05	04	7
4	1	04	02	8

المطلوب:

* ماهي الكميات التي يجب أن يشتريها هذا المستهلك من السلعتين y.x حتى يحقق اكبر منفعة ممكنة.

* ثم تحقق من ذلك باستعمال شرط التوازن.

الحل :

$$R=P_x.x+Py.y.$$

$$\Leftrightarrow R=2x+y$$

$$\frac{UM_X}{Px}=\frac{UM_y}{P_y}\Leftrightarrow\frac{12}{2}=\frac{6}{1}=6$$

$$donc\ \frac{UM_X}{Px}=\frac{UM_y}{P_y}=6$$

بالتعويض في معادلة الدخل نجد:

$\Leftrightarrow R=2(3)+6=12$ وهي محققة.

- و منه الكميات التي يجب أن يشتريها هذا المستهلك من السلعتين Y, X حتى يحقق اكبر منفعة ممكنة هي التوليفة السلعية:.(x, y)= (3, 6)

مثال2:

إذا كان لدينا دالة المنفعة: $UT = X \times Y$

و لنا: $*P_x = 4DA$ $*P_Y = 10DA.$

- إيجاد كمية كل من (Y, X) التي تحقق أقصى إشباع ممكن لهذا المستهلك مع العلم أن الدخل: $R = 400DA$

الحل:

لنا $UM = X \times Y$

$$400 = 4X + 10Y \longrightarrow 2$$

لنا $\frac{UM_x}{P_X} = \frac{UM_X}{P_y} \Leftrightarrow \frac{Y}{4} = \frac{x}{10}$

$$\Leftrightarrow 4X = 10Y \Leftrightarrow X = \frac{10}{4}Y \quad \Leftrightarrow X = \frac{5}{2}Y \longrightarrow 3$$

لنعوض العلاقة 3 في العلاقة 2 نجد:

$$400 = 4(\frac{5}{2}y) + 10y$$

$$\Leftrightarrow 400 = 10Y + 10y \Leftrightarrow 400 = 20Y$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{400}{20} = 20 \qquad \boxed{\Leftrightarrow Y = 20}$$

لنعوض قيمة Y في العلاقة 3 لنجد: $X = \frac{5}{2}(20) = \frac{100}{2} = 50$

$$\boxed{X = 50}$$

- وعليه التوليفة التي تحقق توازن المستهلك هي: $(X, Y) = (50, 20)$

ب- إيجاد توازن المستهلك بطريقة " مضاعف لاغرانج " :

مضاعف لاغرانج و الذي نرمز له بالرمز λ يمثل المنفعة الحدية للدخل أو للنقود، بمعنى هو مؤشر يقيس التغير في المنفعة الكلية الناجم عن التغير في الدخل.

و تستعمل طريقة " مضاعف لاغرانج " لحل مشكلة التعظيم بالنسبة للمستهلك ، إذا كان الأمر يتعلق بتعظيم المنفعة الكلية في حدود دخل معين، أو لحل مشكلة التقليل، إذا كان الأمر يتعلق باستعمال أقل دخل ممكن لتحقيق منفعة كلية معطاة، يفترض أنها هي المنفعة العظمى أو المنفعة التي تحقق التوازن وتتبع طريقة " مضاعف لاغرانج " لحل هاته المشكلة ثلاثة خطوات أساسية هي :

- وضع دالة الهدف للمستهلك.
- وضع نموذج الحل.
- حل النموذج.

1) حالة تعظيم دالة المنفعة الكلية:(Max UT)

➢ **دالة الهدف:** في حالة تعظيم المنفعة الكلية دالة الهدف للمستهلك هي:

$$\boxed{L = \underbrace{Maxf(x,y)}_{\text{دالة المنفعة الكلية}} + \underbrace{\lambda(R - P_X \times X - P_Y \times Y)}_{\text{معادلة الميزانية (الدخل)}}}$$

➢ **نموذج الحل (الشرط اللازم):**

المشتقات الجزئية الأولى لكل المتغيرات= 0

$$L'_X = \frac{\delta UT}{\delta X} - \lambda P_X = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{UM_x}{P_x}.$$

$$L'_Y = \frac{\delta UT}{\delta Y} - \lambda P_Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{UMy}{Py}.$$

$$L'_\lambda = \frac{\delta UT}{\delta \lambda} = R - P_X \times X - P_Y \times Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 3$$

- ومنه $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y}$

➢ حل النموذج :

بحل النموذج السابق نحصل على قيم كل من Y, X التي تعبر عن الكميات التي يجب شراؤها من السلعتين (Y, X) ، والتي تعظم المنفعة الكلية لهذا المستهلك في حدود دخله والأسعار السائدة في السوق.

➢ الشرط الكافي في حالة التعظيم :

$\boxed{H > 0 \text{ (المصفوفة الهيسية) }}$

$$H = \begin{vmatrix} L''_{XX} & L''_{XY} & L''_{X\lambda} \\ L''_{YX} & L''_{YY} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda Y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0$$

$$\boxed{H = L''_{XX}\begin{vmatrix} L''_{YY} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda Y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} - L''_{XY}\begin{vmatrix} L''_{YX} & L''_{Y\lambda} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} + L''_{X\lambda}\begin{vmatrix} L''_{YX} & L''_{YY} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda Y} \end{vmatrix} > 0}$$

$$\Leftrightarrow H = 2(L''_{YX}) \times (L''_{X\lambda}) \times (L''_{Y\lambda}) - (L''_{Y\lambda})^2 \times (L''_{XX}) - (L''_{X\lambda})^2 \times (L''_{YY}) > 0$$

2) حالة تقليل الدخل:(MinR)

➢ دالة الهدف:

$$\boxed{V = MinR + \lambda(U_0 - UT)}$$

➢ الشرط اللازم:

المشتقات الجزئية الأولى لكل المتغيرات= 0

$$V''_X = P_X - \lambda\frac{\delta UT}{\delta X} = P_X - \lambda UM_X = 0.................... \rightarrow 1 \qquad \Leftrightarrow \lambda = \frac{P_X}{UM_X}.$$

$$V''_Y = P_Y - \lambda\frac{UM_Y}{\delta Y} = P_Y - \lambda UM_Y = 0.................... \rightarrow 2 \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{UMy}{Py}.$$

$$V''_\lambda = U_0 - UT = 0.. \rightarrow 3$$

- ومنه :

$$\frac{P_X}{UM_X} = \frac{P_Y}{UM_Y}$$

➢ الشرط الكافي في حالة التقليل :

$H \langle 0$ (المصفوفة الهيسية)

$$H = \begin{vmatrix} V''_{XX} & V''_{XY} & V''_{X\lambda} \\ V''_{YX} & V''_{YY} & V''_{Y\lambda} \\ V''_{\lambda X} & V''_{\lambda Y} & V''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \langle 0$$

$$H = V''_{XX}\begin{vmatrix} V''_{YY} & V''_{Y\lambda} \\ V''_{\lambda Y} & V''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} - V''_{XY}\begin{vmatrix} V''_{YX} & V''_{Y\lambda} \\ V''_{\lambda X} & V''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} + V''_{X\lambda}\begin{vmatrix} V''_{YX} & V''_{YY} \\ V''_{\lambda X} & V''_{\lambda Y} \end{vmatrix} \langle 0$$

$$\Leftrightarrow H = 2(V''_{YX}) \times (V''_{X\lambda}) \times (V''_{Y\lambda}) - (V''_{Y\lambda})^2 \times (V''_{XX}) - (V''_{X\lambda})^2 \times (V''_{YY}) \langle 0$$

- **مثال1:** لتكن دالة المنفعة الكلية للمستهلك: $UT = 2X + 4Y + X \times Y + 8$

و $P_X = 5DA$ ، $P_Y = 10DA$ ، $R = 50DA$

المطلوب: أحسب الكميات التي يجب شراؤها من السلعتين (Y, X) لتعظيم منفعة هذا المستهلك.

الحل:

لنا

$$UT = 2X + 4Y + XY + 8$$

$$50 = 5X + 10Y$$

➢ وضع دالة الهدف لهذا المستهلك :

$$L = 2X + 4Y + X \times Y + 8 + \lambda(50 - 5X - 10Y).$$

➢ وضع نموذج الحل :

$$L'_X = 2 + y - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2+Y}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 1$$

$$L'_Y = 4 + X - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4+X}{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 2$$

$$L'_\lambda = 50 - 5X - 10Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 3$$

➢ حل النموذج :

من العلاقة 1 و 2 نجد :

$$\frac{2+Y}{5} = \frac{4+X}{10} \Leftrightarrow 5(4+X) = 10(2+Y)$$

$$\Leftrightarrow 20 + 5X = 20 + 10Y$$

$$\Leftrightarrow 5X = 10Y \Leftrightarrow X = \frac{10}{5}Y$$

$$\Leftrightarrow X = 2Y.............................. \rightarrow *$$

- بتعويض العلاقة * في العلاقة 3 نجد : $50-5(2Y)-10Y=0$

$$\Leftrightarrow 50-10Y-10Y=0 \Leftrightarrow 50-20Y=0$$

$$\Leftrightarrow 50=20Y \Leftrightarrow Y=\frac{50}{20}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{5}{2}$$

- بتعويض قيمة Y في العلاقة * نجد:

$$X = 2\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{2}=5$$

$$X = 5$$

$$\boxed{\begin{array}{l} donc:(X,Y)=(5,\frac{5}{2}) \\ donc:(X,Y)=(5,2.5) \end{array}}$$

➢ <u>الشرط الكافي</u>: $H>0$ (المصفوفة الهيسية)

$$H=\begin{vmatrix} L''_{XX} & L''_{XY} & L''_{X\lambda} \\ L''_{YX} & L''_{YY} & L''_{YX} \\ L''_{\lambda X} & L''_{\lambda Y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}>0$$

$$\Leftrightarrow H=2(L''_{YX})\times(L''_{X\lambda})\times(L''_{Y\lambda})-(L''_{Y\lambda})^2\times(L''_{XX})-(L''_{X\lambda})^2\times(L''_{YY})>0$$

- لنطبق الشرط الكافي في المثال السابق:

$$H=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix}>0$$

$$\Leftrightarrow H=2(-10)\times(-5)\times(1)-(-10)^2\times 0-(-5)^2(0)>0$$

- إذن: الشرط الكافي محقق $\Leftrightarrow H=100>0$
- طريقة ثانية لحل المصفوفة الهيسية:

$$H=\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-5} \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H=(0)\times\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}+(-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H=0\times(-1)\big(0-(5)(-10)\big)+(-5)\big((-10)-0\big)=50+50=100$$

إذن الشرط الكافي محقق: $\Leftrightarrow H=100>0$

- طريقة أخرى لحل المصفوفة الهيسية:

$$H=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -5 & -10 \end{matrix}$$

- - - + + +

$$\Leftrightarrow H=0\times(0)(0)+(1)(-10)(-5)+(-5)(1)(-10)-(1)(1)(0)-(0)(-10)(-10)-(-5)(0)(-5)$$

$$\Leftrightarrow H=0+50+50-0-0-0=50+50=100$$

$$\Leftrightarrow H=100>0$$

7. إيجاد دوال الطلب على السلعتين X و Y:

- **مثال:** إذا كان دالة المنفعة الكلية $UT=2X.Y$

أوجد دوال الطلب على كل من X و Y .

- **الحل:** لدينا دالة المنفعة الكلية: $UT=2XY$

معادلة الدخل من الشكل: $R=P_X\times X+P_Y\times Y$

➢ وضع دالة الهدف للمستهلك : $L=(2XY)+\lambda(R-P_X\times X-P_Y\times Y)$

➢ وضع نموذج الحل (الشرط اللازم):" المشتقات الجزئية الأولى= 0 "

$$L'_X=2Y-P_X\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{2Y}{P_X}..............\rightarrow 1$$

$$L'_Y=2X-P_Y\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{2X}{P_Y}............\rightarrow 2$$

$$L'_\lambda=R-P_X\times X-P_Y\times Y=0............\rightarrow 3$$

➢ حل النموذج:

من 1 و 2 نجد: (دالة الطلب على السلعة Y) :

$$\frac{2Y}{P_X} = \frac{2X}{P_Y} \Leftrightarrow P_X(2X) = P_Y(2Y) \Leftrightarrow X = \frac{P_Y}{P_X}Y.........\rightarrow *$$

- بتعويض العلاقة * في العلاقة 3 نجد:

$$R = P_X \times \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)Y - P_Y \times Y = 0 \Leftrightarrow R = 2P_Y \times Y \Leftrightarrow y = \frac{R}{2P_Y}$$

- دالة الطلب على السلعة Y

$$\boxed{y = \frac{R}{2P_Y}}$$

- بتعويض العلاقة * في العلاقة 3 نجد:

- دالة الطلب على السلعة X

$$X = \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)\frac{R}{2P_Y} \Leftrightarrow X = \frac{R}{2P_X}$$

- **أهمية ايجاد دوال الطلب على السلعتين X و Y:**

تتمثل أهمية دراسة دوال الطلب فيما يلي:

- **تحديد طبيعة العلاقة بين الكميات X أو Y و الأسعار P_X أو P_Y.(طردية أو عكسية).**
- **تحديد طبيعة العلاقة بين الكميات X أو Y و الدخل.(طردية أو عكسية).**
- **تحديد طبيعة العلاقة بين السلعتين X و Y .**
- **تحديد طبيعة السلعتين X أو Y (سلع عادية أو رديئة).**

- **مثال2 :**

لدينا دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما: $UT = Y(X+1)$

إذا كانت السلع الإفرادية (أسعارها) $P_X = 10DA$ ، $P_Y = 40DA$

وكانت لدينا قيمة المنفعة $U = 64$

المطلوب : - حدد قيم X و Y التي يكون الدخل أقل ما يمكن (حدد قيمة R).

▪ **الحل:**

- تحديد قيم X و Y التي يكون فيها الدخل أقل ما يمكن (مع تحدد الدخل R).

لنا

$$R = P_X \times X + P_Y \times Y \quad \Leftrightarrow R = 10X + 40Y$$

➢ وضع دالة الهدف لهذا المستهلك:

$$V = MinR + \lambda(U_0 - UT)$$

$$\Leftrightarrow V = (10X + 40Y) + \lambda(64 - Y(X+1))$$

➢ وضع نموذج الحل: (الشرط اللازم):

$$V''_X = 10 - Y\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{Y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 1$$

$$V''_Y = 40 - (X+1)\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{40}{(X+1)} \ldots\ldots\ldots \to 2$$

$$V''_\lambda = 64 - Y(X+1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \to 3$$

➢ حل النموذج: من 1 و2 نجد:

$$\frac{10}{Y} = \frac{40}{(X+1)} \Leftrightarrow 40Y = 10(X+1) \Leftrightarrow Y = \frac{10(X+1)}{40}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{(X+1)}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \to *$$

- لنعوض العلاقة * في العلاقة 3 نجد:

$$64 - \left(\frac{(X+1)}{4}\right)(X+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 64 = \frac{(X+1)^2}{4} \Leftrightarrow 256 = (X+1)^2$$

$$donc \quad X = 15$$

- وبتعويض قيمة (X) في العلاقة * نجد:

$$Y = \frac{(15+1)}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

التوليفة المثلى للمستهلك هي:

$$donc: (X, Y) = (15, 4)$$

قيمة مضاعف لاغرانج هي: $\lambda = \frac{40}{16} = \frac{10}{4} = 2.5$

وعليه :

$$R = 10(15) + 40(4) = 150 + 160 = 310$$

$$donc \quad R = 310$$

➢ <u>الشرط الكافي</u>:

$$H=\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{-\lambda} & \overset{+}{-Y} \\ -\lambda & 0 & -X-1 \\ -Y & -X-1 & 0 \end{vmatrix}<0$$

$$\Leftrightarrow H=(0)\begin{vmatrix} 0 & -X-1 \\ -X-1 & 0 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -X-1 \\ -Y & 0 \end{vmatrix}+(-Y)\begin{vmatrix} -\lambda & -0 \\ -Y & -X-1 \end{vmatrix}<0$$

$$\Leftrightarrow H=0-\lambda(-(-Y)(-X-1))+(-Y)(-(-\lambda)(-X-1))<0$$

$$\Leftrightarrow H=-\lambda Y(X+1)-Y\lambda(X+1)$$

$$donc \quad H=-2\lambda Y(X+1)=-2(2.5)(4)(16)=-320<0$$

إذن الشرط الكافي محقق.

<u>مثال2</u>: لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية من الشكل التالي: $UT=X^2\cdot Y\cdot Z$

و معادلة الدخل معطاة كما يلي: $64=2X+4Y+Z$

<u>المطلوب</u>:- أحسب الكميات التي يجب شراؤها من السلع (Z,Y,X) لتعظيم منفعة هذا المستهلك.

- تأكد من ذلك باستعمال الشرط الكافي.

<u>الحل</u>

➢ <u>وضع دالة الهدف للمستهلك</u>: $L=(X^2\cdot Y\cdot Z)+\lambda(64-2X-4Y-Z)$

➢ <u>الشرط اللازم</u>:

$$L'_X=2Y\cdot Z\cdot X-2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\frac{\cancel{2}YZX}{\cancel{2}}=YZX\Leftrightarrow\lambda=YZX\text{.........}\rightarrow 1$$

$$L'_Y=X^2\cdot Z-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{X^2\cdot Z}{4}\text{....................................}\rightarrow 2$$

$$L'_Z=X^2\cdot Y-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=X^2\cdot Y\text{....................................}\rightarrow 3$$

$$L'_\lambda=64-2X-4Y-Z=0\text{....................................}\rightarrow 4$$

➢ <u>حل النموذج</u>:

-من 2 و 3 نجد: $\frac{X^2\cdot Z}{4}=X^2\cdot Y\Leftrightarrow 4X^2\cdot Y=X^2\cdot Z$

$$\Leftrightarrow Z=4Y\Leftrightarrow Y=\frac{Z}{4}\text{..........................}\rightarrow *$$

- من 1 و 3 نجد: $YZX = X^2 \cdot Y \Leftrightarrow Z = X ....\rightarrow **$

بتعويض * و** في 4 نجد: $64 = 2(Z) - 4(\frac{Z}{4}) - Z = 0$

$$\Leftrightarrow 64 - 2Z - Z - Z = 0$$
$$\Leftrightarrow 64 - 2Z - Z - Z = 0$$
$$\Leftrightarrow 64 - 4Z = 0$$
$$\Leftrightarrow 64 = 4Z$$
$$\Leftrightarrow Z = \frac{64}{4} = 16 \qquad donc \quad Z = 16$$

- نعوض قيمة (Z) في $*'$ نجد: $donc \quad X = 16$

- نعوض قيمة (Z) في $*$ نجد: $Y = \frac{16}{4} = 4 \qquad donc \quad y = 4$

و التوليفة التي تعظم منفعة هذا المستهلك هي: $donc: (X, Y, Z) = (16, 4, 16)$

➢ الشرط الكافي:

$$H = \begin{vmatrix} 2YX & 2XZ & 2XY & -2 \\ 2XZ & 0 & X^2 & -4 \\ 2XY & X^2 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

H1 H2

(سالب) $H_1 < 0$

(موجب) $H_2 > 0$

لنا $H_1 = \begin{vmatrix} 2YZ & 2XZ \\ 2XZ & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow H_1 = 0(2YZ) - (2XZ)\cdot(2XZ)$

$$\Leftrightarrow H_1 = 0 - 4X^2Z^2$$

إذن: الشرط الأول محقق $donc\ H_1 = -4X^2Z^2 = -4(16)^2(16)^2 = -262144 < 0$

$$H_2 = 2ZY\begin{vmatrix} 0 & X^2 \\ X^2 & 0 \end{vmatrix} - 2XZ\begin{vmatrix} 2XZ & X^2 \\ 2XY & 0 \end{vmatrix} + 2Xy\begin{vmatrix} 2XZ & 0 \\ 2XY & X^2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H_2 = (0 - X)^2 2ZY - 2XZ(0 - (2XY)(X^2) + 2XY\left((X^2)(2XZ) - (2XY)0\right)$$

$$\Leftrightarrow H_2 = -2X^4YZ + 4YZX^4 2XY(2X^3Z)$$

$$\Leftrightarrow H_2 = -2X^4YZ + 4YZX^4 + 4YZX^4$$

$$\Leftrightarrow H_2 = 8YZX^4 - 2YZX^4$$
$$\Leftrightarrow H_2 = 6YZX^4 > 0$$

- إذن الشرط الثاني محقق: $donc \quad H_2 = 6YZX^4 = 6(4)(16)(16)^4 = 25165824 > 0$

و منه الشرط الكافي محقق إذن الحل أمثل.