1.4.2. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f, mais cette fois jusqu'à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Le résultat final est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui représente un outil d'une grande utilité.

Algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t_0 , y_0) et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour $0 \leq n \leq N$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Ecrire t_{n+1}, y_{n+1}

3. Arrêt

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle : $y'(t) = f\big(t, y(t)\big) = t^3 + y^2(t)\,; t \in [0,2]$ et la condition initiale $y(0) = 0$. On a donc $t_0 = 0$ et $y_0 = 0$, et on prend un pas de temps $h = 0.2$. En utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, calculer $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$approximations de la solution exacte $y(t)$ du problème aux points $t_1 = 0.2$ et $t_2 = 0.4$.

L'algorithme devient :

Itération 1 :

$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0$

$k_2 = hf(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0.0002$

$k_3 = hf(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = 0.0002$

$k_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3) = 0.0016$

$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.0004$$

Itération 2 :

$k_1 = hf(t_1, y_1) = 0.0016$

$k_2 = hf(t_1 + h/2, y_1 + k_1/2) = 0.0054$

$k_3 = hf(t_1 + h/2, y_1 + k_2/2) = 0.005401$

$k_4 = hf(t_1 + h, y_1 + k_3) = 0.0128067$

$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.006402$$

Exemple 2 :

Soit l'équation différentielle : $y'(t) = - y(t) + t$; et la condition initiale $y(0) = 1$. On a donc

$t_0 = 0$ *et* $y_0 = 1$, et on prend un pas de temps $h = 0.1$. L'algorithme devient :

Itération 1

$k_1 = 0,\ k_2 = 0.005,\ k_3 = 0.00475,\ k_4 = 0.009525$

$y_1 = 1.0048375$

Itération 2

$k_1 = 0.00951625,\ k_2 = 0.014040,\ k_3 = 0.01381,\ k_4 = 0.018134$

$y_2 = 1.01873$

1.5. Systèmes d'équations différentielles

La forme générale d'un système de m équations différentielles avec conditions initiales s'écrit :

$$y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\big) \quad ; \quad y_1(t_0) = y_{1,0}$$

$$y_2'(t) = f_2\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\big) \quad ; \quad y_2(t_0) = y_{2,0}$$

$$y_m'(t) = f_m\big(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\big) \quad ; \quad y_m(t_0) = y_{m,0}$$

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles, nous ne présentons que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Algorithme de la méthode de RK4 pour résoudre les systèmes d'équations différentielles

1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale $(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})$ et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour $0 \le n \le N$

   Pour $i = 1, 2, \dots, m$

   $k_{1,i} = hf_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n})$

   Pour $i = 1, 2, \dots, m$

   $k_{2,i} = hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{1,2}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{k_{1,m}}{2})$

Pour $i = 1, 2, \ldots, m$

$$k_{3,i} = hf_i(t_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{k_{2,2}}{2}, \ldots, y_{m,n} + \frac{k_{2,m}}{2})$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, m$

$$k_{4,i} = hf_i(t_n, y_{1,n} + k_{3,1}, y_{2,n} + k_{3,2}, \ldots, y_{m,n} + k_{3,m})$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, m$

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i})$$

$t_{n+1} = t_n + h$

Pour $i = 1, 2, \ldots, m$

Écrire t_{n+1} et $y_{i,n+1}$

3. Arrêt.

Exemple 1 :

Considérons le système de deux équations différentielles d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = e^{2t}sin(t) - 2y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = -0.4 \quad ; \quad y_2(0) = -0.6 \quad ; \quad h = 0.1 \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à ce système.

On a :

$$y_{1,0} = -0.4 \quad ; \quad y_{2,0} = -0.6$$
$$k_{1,1} = hf_1(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = hy_{2,0} = -0.06$$
$$k_{1,2} = hf_2(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = -0.04$$
$$k_{2,1} = hf_1(t_0 + h/2, y_{1,0} + k_{1,1}/2, y_{2,0} + k_{1,2}/2) = -0.062$$
$$k_{2,2} = hf_2(t_0 + h/2, y_{1,0} + k_{1,1}/2, y_{2,0} + k_{1,2}/2) = -0.03247$$
$$k_{3,1} = hf_1(t_0 + h/2, y_{1,0} + k_{2,1}/2, y_{2,0} + k_{2,2}/2) = 0.0616$$
$$k_{3,2} = -0.03152$$
$$k_{4,1} = -0.06315$$
$$k_{4,2} = -0.02178$$

On aura donc :

$$\begin{cases} y_{1,1} = y_{1,0} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k3,1 + k_{4,1})/6 = -0.4617 \\ y_{2,1} = y_{2,0} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k3,2 + k_{4,2})/6 = -0.6316 \end{cases}$$

Exemple 2 :

Soit le système de deux équations différentielles d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_1(t)\,;\, y_1(0) = 2\,;\, y_2(0) = 1\,;\, h = 0.1 \end{cases}$$

On a alors :

$$f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = y_2(t)$$
$$f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = 2y_2(t) - y_1(t)$$

On trouve

$$k_{1,1} = 0.1f_1(0, 2, 1) = 0.1$$
$$k_{1,2} = 0.1f_2(0, 2, 1) = 0$$
$$k_{2,1} = 0.1f_1(0.005, 2.05, 1) = 0.1$$
$$k_{2,2} = 0.1f_2(0.005, 2.05, 1) = -0.005$$
$$k_{3,1} = 0.1f_1 = 0.09975$$
$$k_{3,2} = 0.1f_2 = -0.0055$$
$$k_{4,1} = 0.1f_1 = 0.09945$$
$$k_{4,2} = 0.1f_1 = -0.011075$$
$$y_{1,1} = y1,0 + \tfrac{1}{6}(0.1 + 2(0.1) + 2(0.09975) + 0.09945) = 2.0998$$
$$y_{2,1} = y_{2,0} + \tfrac{1}{6}(\ldots) = 0.99465$$

1.6. Equations d'ordre supérieur

Une équation différentielle d'ordre m avec conditions initiales est parfaitement équivalente à un système de m équations différentielles d'ordre 1. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre m avec conditions initiales est :

$$y^m(t) = f\left(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t) \ldots., y^{(m-1)}(t)\right)$$

avec m conditions initiales :

$$y(t_0) = c_1,\, y'(t_0) = c_2,\, \ldots,\, y^{(m-2)}(t_0) = c_{m-1},\, y^{(m-1)}(t_0) = c_m$$

L'équation différentielle d'ordre m avec les m conditions initiales est équivalente au système de m équations d'ordre 1 suivant :

$$y'_1(t) = y_2(t)$$
$$y'_2(t) = y_3(t)$$
$$y'_3(t) = y_4(t)$$
$$\vdots$$
$$y'_{m-1}(t) = y_m(t)$$
$$y'_m(t) = f(t\ , y_1(t)\ , y_2(t), \ldots, y_m(t))$$

avec

$$y_1(t_0) = c_1$$
$$y_2(t_0) = c_2$$
$$\vdots$$
$$y_m(t_0) = c_m$$

Une fois l'équation d'ordre m transformée en un système de m équations différentielles d'ordre 1, on peut recourir à l'algorithme de la méthode de R-K d'ordre 4.

<u>Exemple 1 :</u>

Soit l'équation différentielle : $y^{(2)}(t) = - y^{(1)}(t) + (y\ \ (t))^2 + t^2 - 5$; et la condition initiale

$y(0) = 1\ ;\ y^{(1)}(0) = 2.$

On pose :

$$y_1(t) = y(t)$$
$$y_2(t) = y^{(1)}(t)$$

On obtient le système de 2 équations différentielles du premier ordre suivant :

$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = -y_2(t) + (y_1(t))^2 + t^2 - 5$$
$$\text{avec : } y_1(0) = 1 \text{ et } y_2(0) = 2$$

<u>Exemple 2 :</u>

Soit l'équation différentielle du 3ième ordre :

$$y'''(t) = (y''(t))^2 + 2y'(t))^3 + t^4 + 1 \text{ avec } y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \text{ et } y''(1) = 3.$$
$$y_1(t) = y(t)$$
$$y_2(t) = y'(t)$$
$$y_3(t) = y''(t)$$

On obtient le système de 3 équations différentielles du premier ordre suivant :

$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_3(t)$$
$$y_3'(t) = (y_3(t))^2 + 2y_2(t) + (y_1(t))^3 + t^4 + 1$$
$$\text{avec : } y_1(1) = 1,\ y_2(1) = 0 \text{ et } y_3(1) = 3$$