République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Cours d'analyse avec exercices corrigés

Présenté par

D. Laiadi Abdelkader

Octobre 2022

Table des matières

Table des figures

Introduction

Ce polycopié est une partie du programme officiel du module Mathématiques , Statistique et informatique destiné principalement aux étudiants en première année licence de biologie, mais peut éventuellement être utile pour les étudiants en autre modules de mathématiques (dans le cadre du système L.M.D.), et toute personne souhaitant connaître les techniques de calcul des limites des suites ou fonctions et aussi la dérivées, l'intégrale d'une fonction.
Le niveau mathématique requis est celui de la premiére année Licence Mathématique , économique , physique ou encore S.T. Le contenu de cette matière est la base de toute introduction à l'analyse mathématique. Elle permet à l'étudiant d'acquérir le maximum de techniques mathématiques nécessaires pour la plupart des matières étudiées le long de son cursus, à savoir : probabilités et statistiques, analyse numérique, programmation mathématique et files d'attente...etc.
Ce polycopié comporte trois chapitres principaux et annexe, où sont exposées
1) Notions sur les suites numériques.
2) Quelques définitions et théorèmes sur limites, continuité et les dérivées des fonctions.
3) Quelques méthodes de calcul d'intégrale d'une fonction.
et l'annexe contient les quelques définitions et notations sur logique mathématiques.
Chaque chapitre se termine par quelques exercices corrigés permettant de contrôler l'acquisition des notions essentielles qui ont été introduites.
Je ne saurais pas terminer cet avant-propos sans un grand hommage plus personnel à mes collègues enseignants ayant expertisé sérieusement ce polycopié. Je souhaite remercier également et tout particuliérement nos lecteurs. Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

Chapitre 1

Les suites

1.1 Introduction

L'étude des suites numériques a pour objet la compréhension de l'évolution de séquences de nombres réels ou complexes. Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne.

Ce chapitre contient trois partiés

1. Quelques définitions sur les suites
2. Limite d'une suite et suites convergentes
3. Suite récurrentes

1.2 Définitions

1.2.1 Définition d'une suite

• Une suite est une application $u : N \longrightarrow R$.

• Pour $n \in N$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle $n-$ème terme ou terme général de la suite. La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in N}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n>n_0}$.

1.2.2 Suite à terme positifs

La suite $(u_n)_{n\in N}$ est dite à termes positifs si son terme général u_n est positif, pour tout $n \in N$. Formellement ceci veut dire que $u_n \geq 0, \forall n \in N$.

Exemlpes.

1) $u_n = n^2, n \geq 0$ est la suite de termes positifs : $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4, ...$

2) $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est la suite qui alterne $+1, -1, 1, -1, ...$

3) (F_n) définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in N$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$Chaque terme est la somme des deux précédents.

1.2.3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in N}$ est **majorée** si $\exists M \in R \;\; \forall n \in N \;\; u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in N}$ est **minorée** si $\exists m \in R \;\; \forall n \in N \;\; u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n\in N}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in R \quad \forall n \in N \quad |u_n| \leq M$$

Exemples.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ est majorée par $\frac{1}{2}$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par-1 (borne atteinte en $n = 1$) donc u_n est bornée.

2. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

3. Soit la suite $u_n = \sin(n), n \in N$. Elle est bornée car $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

1.2.4 Suite croissante, décroissante

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite.

• $(u_n)_{n\in N}$ est croissante si $\forall n \in N \quad u_{n+1} \geq u_n$.

• $(u_n)_{n\in N}$ est strictement croissante si $\forall n \in N \quad u_{n+1} > u_n$.

• $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante si $\forall n \in N \quad u_{n+1} \leq u_n$.

• $(u_n)_{n\in N}$ est strictement décroissante si $\forall n \in N \quad u_{n+1} < u_n$.

• $(u_n)_{n\in N}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

• $(u_n)_{n\in N}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque.

• $(u_n)_{n\in N}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in N \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

• Si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exemples.

1. La suite $u_n = \frac{1}{n}, n \in N$ est une suite strictement décroissante car $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n\,(n+1)} < 0$.

2. La suite $u_n = n^2, n \in N$ est une suite strictement croissante car $u_{n+1} = (n+1)^2$ et $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$

3. La suite $u_n = e^n, n \in N$ est une suite strictement croissante car $u_{n+1} = e^{n+1}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1$.

1.3 Limites

1.3.1 Limite finie, limite infini

Définition 1.

La suite $(u_n)_{n\in N}$ a pour limite $l \in R$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall n \in N \ \ \ n \geq \delta \Longrightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in N}$ tend vers l noté $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$‘.

Définition 2.

La suite $(u_n)_{n\in N}$ tend vers $+\infty$ ou $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$. si

$$\forall A > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall n \in N \ \ \ n \geq \delta \Longrightarrow u_n \geq A$$

La suite $(u_n)_{n\in N}$ tend vers $+\infty$ ou $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$ si

$$\forall A > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall n \in N \ \ \ n \geq \delta \Longrightarrow u_n \leq -A$$

1.3.2 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$‘ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = l' \, (l, l' \in R)$

1. Pour $\lambda \in R$ on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \lambda u_n = \lambda l$‘.
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$‘.
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$.
4. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{l} \, (l \neq 0, u_n \neq 0 \, (\forall n \in N))$.

1.3.3 Suites convergentes

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est **divergente** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition.

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Exemples.

1) Soit $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Donc u_n est divergente.

2) La suite $v_n = (-1)^n$ n'a pas une limite car

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 \ \text{ si } n \text{ est paire} \\ -1 \ \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Alors u_n est divergente.

3) La suite $w_n = \dfrac{n}{n+1}$ est convergente car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Proposition.

Toute suite convergente est bornée.

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente car $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$. On a $0 < \dfrac{1}{n^2+1} \leq 1$ (on a $n^2+1 \geq 1$) donc u_n est bonée.

Proposition

Si la suite $(u_n)_{n\in N}$ est bornée et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n v_n) = 0$

Exemple. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite donnée par $u_n = \cos(n)$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ est celle donnée par $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (u_n v_n) = 0$$

1.3.4 Limite et inégalités

1. Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in N, u_n \leq v_n$ alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n$$

2. Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in N, u_n \geq v_n$. Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$$

3. Si $(u_n)_{n\in N}$, $(v_n)_{n\in N}$ et $(w_n)_{n\in N}$ sont trois suites telles que

$$\forall n \in N, u_n \leq v_n \leq w_n$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = l$ alors la suite $(v_n)_{n\in N}$ est convergente et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = l$.

Exemple. Soit la suite $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Nous avons

$$2 - \frac{1}{n} \leq 2 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 2 + \frac{1}{n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$.

1.4 Suites récurrentes

Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 \in R \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :

$$u_0, u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), ...$$

Exemple. Soit $f(x) = 1+x$. Fixons $u_0 = 2$ et définissons pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n) = 1+u_n$. Alors les premiers termes de la suite sont :

$$u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 4, ...$$

Une suite récurrente donnée n'est pas forcément convergente. Lorsqu'elle admet une limite, l'ensemble des valeurs possibles est restreint par les résultats essentiels suivants.

Théorème 1.

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème 2.

Soit : $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction **croissante**. Alors la suite récurrente définie par : $u_0 \in [a, b]$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est **monotone**.

• Si $u_0 \leq u_1$ la suite est croissante.

• Si $u_0 \geq u_1$ la suite est décroissante.

Proposition.

Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers l , alors l est une solution de l'équation :

$$f(l) = l$$

Si on arrive à montrer que la limite existe, cette proposition affirme qu'elle est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(l) = l$

Exemple. Soit la suite récurrente : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

1) On montrons que u_n est coissante : on utilise deux méthodes

a) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n + 2}$. On étudie le singe de $u_n^2 - u_n + 1$, on a $\Delta = -3$ donc l'éxpression $u_n^2 - u_n + 1$ est positive, c-à-dire u_n est croissante.

b) On a $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$ sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2} > 0$. Donc f est croissante et on a $u_0 \leq u_1 = \frac{1}{2}$, alors u_n est croissante.

2) On montrons que $u_n < 1$, puisque f est croissante et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$ alors $f(x) < 1$. On déduit que $u_n < 1$.

D'aprés (1) et (2) et théorème 1, on implique que u_n est convergente.

1.5 Exemples remarquables

1.5.1 Suite arithmétique

Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Propriétés (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

1. Le terme générale $u_n = u_0 + nr$ (en général $u_n = u_p + (n-p)\, r, p \in N$)

2. La somme des termes de (u_n), pour tout $n, p \in N$

$$S = u_p + u_1 + ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}\left(u_p + u_n\right), p < n$$

3. u_n est croissante si $r > 0$ et u_n est décroissante si $r < 0$

Exemple. La suite $u_n = 7 - 2n$ est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

calcul la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$. On a $S = \frac{n+1}{2}\left(u_0 + u_n\right)$ alors

$$\begin{aligned} S &= \frac{n+1}{2}(7 + 7 - 2n) \\ &= \frac{n+1}{2}(17 - 2n) \end{aligned}$$

1.5.2 Suite géométrique

Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Propriétés (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

1. Le terme générale $u_n = u_0 \times q^n$ (en général $u_n = u_p \times q^n, p \in N$)

2. La somme des termes de (u_n), pour tout $n, p \in N$

$$S = u_p + u_1 + ... + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}, p < n$$

3. Si $u_0 > 0$

u_n est croissante si $q > 1$ et u_n est décroissante si $0 < q < 1$.

Si $u_0 < 0$

u_n est décroissante si $q > 1$ et u_n est croissante si $0 < q < 1$.

Exemple. La suite $u_n = 5e^{2n}$ est une suite géométrique de raison $q = e^2$.

On a la somme $S = u_2 + u_1 + ... + u_n$ alors

$$S = u_2 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = 5e^4 \frac{1-e^{2(n-1)}}{1-e^2}$$

1.6 Exercices du chapitre 1

EXERCICE 1.1 Soient $a, b \in R$ avec $a \neq 1$ et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Quelle est la seule limite possible l de la suite (u_n) ?

2. Soit $v_n = u_n - l$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en déduire la nature de la suite (u_n).

3. Quelle est la limite de (u_n) ?

LA SOLUTION

1. Si (u_n) converge vers l, alors l est solution de $al + b = l$, et donc $l = \dfrac{b}{1-a}$.

2.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - l = au_n + b - \frac{b}{1-a} = av_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison a. Alors $v_n = v_0.a^n = (u_0 - l)\, a^n$

3. Si $|a| > 1$, $|v_n| \longrightarrow +\infty$ et il en est de même de $(|u_n|)$ (sauf si $u_0 = l$ au quel cas la suite est constante égale à l). Si $|a| < 1$, alors (v_n) converge vers 0 et (u_n) converge vers l. Enfin, si $a = -1$, (v_n) oscille entre deux valeurs suivant que n est pair ou impair, et (u_n) aussi.

EXERCICE 1.2

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\ln x$. Soit u_n la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_n+1=f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.

2. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $[1,+\infty[$.

3. Étudier la monotonie de u_n.

4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

LA SOLUTION

1. Démontrons par récurrence sur $n \in N$ la propriété $P(n)$ suivante :"$u_n \geq 1$".

Initialisation : on a bien $u_0 \geq 1$ et donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in N$ tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \geq 1$. On a alors, puisque la fonction logarithme est croissante, $\ln(u_n) \geq \ln(1)=0$, puis $u_n+1=1+\ln(u_n) \geq 1+0=1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

2. Posons $g(x)=f(x)-x=1+\ln(x)-x$. La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$, et sa dérivée est donnée par $g\prime(x)=\frac{1}{x}-1$. Pour $x \geq 1$, on a $\frac{1}{x} \leq 1$ et donc $g\prime(x) \leq 0$, et même on a $g\prime(x)<0$ pour $x>1$. Ainsi, g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Puisque $g(1)=1+\ln(1)-1=0$, on en déduit que $g(x)<0$ pour tout $x>1$. Ainsi, on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 1$, et même $f(x)<x$ pour tout $x>1$.

3. Soit $n \in N$. Alors, puisque $u_n \geq 1$, on a d'après la question précédente $u_{n+1}=f(u_n) \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit l sa limite. Alors l vérifie l'équation $l=f(l)$ et de plus $l \geq 1$ puisque $u_n \geq 1$ pour tout n. Or, on sait que $x<f(x)$ pour $x>1$. On en déduit que $l=1$: la suite converge vers 1 $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=1\right)$.

EXERCICE 1.3

Étudier la convergence des suites suivantes

$$u_n=\frac{1}{n}\left(n \in N^*\right), v_n=2n^2-1, a_n=\frac{2n}{n+1}, b_n=(-2)^n, c_n=5^n$$

LA SOLUTION

On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc u_n est convergente.

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2n^2 - 1 = +\infty$ alors v_n est divergente.

On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ donc a_n est convergente.

On a $(-2)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est paire} \\ -2 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$ alors b_n n'a pas une limite c-à-dire b_n est divergente.

En fin, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 5^n = +\infty$ d'où c_n est divergente.

EXERCICE 1.4

Une espèce, en voie de disparition, évolue au cours du temps (en années) selon la formule

$$u_n = \frac{N_0}{a + be^n} \quad \text{avec } N_0, a \text{ et } b \in R^+$$

où n représente le temp en années, u_n modèlise le nombre d'animaux restant à la date n.

1) Quel est le nombre d'animal à l'état initiale.

2) Que peut-on dire de l'évolution de cette espèse (sens de variation).

3) Si $N_0 = 100000, a = 900$ et $b = 100$ alors, au bout de combien de temps il ne nous reste qu'un seul spécimen de cette espèse .

4) Démontrer que tôt ou tard cette espèce va disparaître complètement.

LA SOLUTION

1) L'état initiale est le premier terme de la suite $u_0 = \frac{N_0}{a + be^0} = \frac{N_0}{a+b}$.

2) La variation de la suite u_n : on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{N_0}{a + be^{n+1}} - \frac{N_0}{a + be^n} \\ &= N_0 \frac{be^n - be^{n+1}}{(a + be^n)(a + be^{n+1})} \\ &= N_0 be^n \frac{1 - e}{(a + be^n)(a + be^{n+1})} < 0 \end{aligned}$$

donc u_n est décroissante.

3) On a $u_n = 1$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{100000}{900 + 100e^n} = 1 &\Longleftrightarrow 900 + 100e^n = 100000 \\
&\Longleftrightarrow e^n = 991 \\
&\Longleftrightarrow n = \ln(991) \simeq 6
\end{aligned}$$

4) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{N_0}{a + be^n} = 0.$

EXERCICE 1.5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $3u_{n+1} = u_n + 4$

1. Calculer u_1, u_2.

2. Démontrer que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.

3. Montrer que u_n est une suite décroissante.

4. Montrer que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite.

5. On pose, pour tout entier n , $v_n = u_n - 2$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6. Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Déterminer l'expression de S_n , puis de T_n , en fonction de n .

7. Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n$

LA SOLUTION

1) $u_1 = 3, u_2 = \frac{7}{3}$.

2) Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ d'après ce qui précède.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \geq 2$.

Alors, $u_n + 4 \geq 2 + 4 = 6$, et donc $3u_{n+1} \geq 6$.

Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n,

$u_n \geq 2$.

3) On peut aussi le montrer directement :

Pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$, et donc

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

Or, pour tout entier n , $u_n \geq 2$, et ainsi, $-\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{4}{3}$, d'où,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 0$$

alors la suite u_n est donc décroissante.

4) D'après ce qui précède, la suite u_n est décroissante et minorée par 2 , elle converge donc vers une limite $l \geq 2$.

Cette limite l satisfait de plus nécéssairement l'équation $3l = l + 4$ (point fixe), soit $l = 2$.

Ainsi, la suite u_n converge vers $l = 2$.

5) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}v_n$

La suite v_n est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

On en déduit que, pout tout entier n,

$$v_n = v_0 q^n = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

6) Calcul S_n

$$S_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} = 3.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Pour tout entier $n, v_n = u_n - 2 \Longleftrightarrow u_n = v_n + 2$, et donc

$$\begin{aligned}
T_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= v_0 + 2 + v_1 + 2 + ... + v_n + 2 \\
&= S_n + 2\left(n+1\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2\left(n+1\right)
\end{aligned}$$

7) Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{9}{2}$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T_n = +\infty$

Chapitre 2

Les fonctions numériques

2.1 Introduction

Le nom de fonction est apparu assez tard, en 1694 dans un manuscrit de Gottfried **Leibniz** alors que la notion existait depuis beaucoup plus de temps. C'est ensuite Leonhard **Euler** qui propose la notation f pour les fonctions en 1734 (après plusieurs tentatives plus ou moins convaincantes par d'autres mathématiciens). C'est enfin Nicolas **Bourbaki** qui tente de faire le lien entre fonction et application dans les années 1950.
Nous aborderons ici les fonctions le cadre le plus simple : ce sont les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelle.

2.2 Définitions

2.2.1 fonction d'une variable réelle

Définition 1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D \longrightarrow R$, où D est une partie de R. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Exemple. La fonction

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow R$$

$$x \longmapsto \sqrt{x-1}$$

Définition 2. Le graphe d'une fonction $f : D \longrightarrow R$ est la partie Γ_f de R^2 définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in D\}$.

Exemple. La figure ci-dessous réprésente le graphe de la fonction f est définie par

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow R$$

$$x \longmapsto f(x) = \log(x)$$

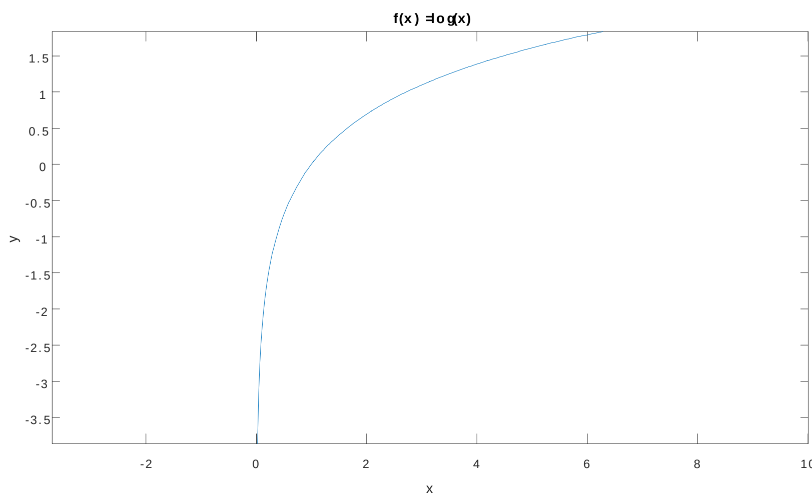


FIG. 2.1 – Le graphe de la fonction $f(x) = \log(x)$

Ensemble de définition

Définition. L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie. Si $f : D \longrightarrow R$, la partie D est le domaine de définition de f.

Exemples. 1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ a pour ensemble de définition : $D_f =]-\infty, 4]$ car $4 - x \geq 0$

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x - 6}$. On a $D_g = \{x \in R, x^2 - 5x - 6 \neq 0\}$ donc $D_g = R - \{-1, 6\}$ car

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 6$$

Image d'un intervalle

Définition. Soit f une fonction et I une partie de R . L'image de I par f , notée $f(I)$ est l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ avec $x \in I$:

$$f(I) = \{f(x) \text{ où } x \in I\}$$

Exemple. Soit $f(x) = x^2 + 5$ donc $f[1,5] = [6,30]$ $(f(1) = 6, f(5) = 30$ et f est croissante sur $[1.5])$.

Restriction (d'une fonction à un ensemble) :

Soit une fonction définie sur un ensemble E, et A une partie de E.

La restriction de f à A, notée f_A ou $f|_A$ est la fonction définie par $f_A(x) = f(x)$, pour tout de A.

2.2.2 Variation d'une fonction

Définition. Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non). Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

1) f est croissante sur I si, et seulement si :

pour tous u et v de I : $v > u \Longrightarrow f(v) > f(u)$

2) f est décroissante sur I si, et seulement si :

pour tous u et v de$I$: $v > u \Longrightarrow f(v) < f(u)$

3) f est monotone sur I si, et seulement si :

f est croissante sur I ou décroissante sur I.

Exemple. Soit la fonction $f(x) = x^2$ est définie sur R^+. On a

$$\forall a, b \in R^+ : a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$$

ce qui implique que f est croissante sur R^+ (voir la figure 2.2).

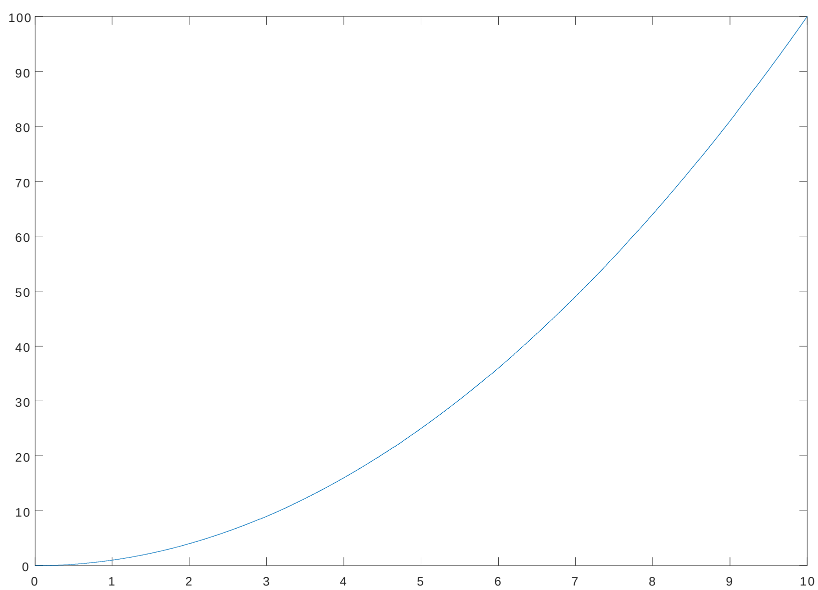


FIG. 2.2 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^2$ sur R^+

2.2.3 Comparaison de fonctions

Définiton. On dit que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

$*$ Elles ont même ensemble de définition $D_f = D_g$

$*$ Pour tout $x \in D_f, f(x) = g(x)$.

Exemple. Les fonction f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ ce qui donne $D_f =]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[$.

Pour g , on doit avoir $x - 1 \geq 0, x + 3 > 0$, ce qui donne $D_g = [1, +\infty[$.

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonction ne sont donc pas égales. On remarquera cependant que sur $[1, +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$.

2.2.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition. Soient $f : U \longrightarrow R$ et $g : U \longrightarrow R$ deux fonctions. Alors :

$*$ $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$

$*$ $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$

$*$ f est dite constante sur U si $\exists a \in R \;\; \forall x \in U \quad f(x) = a$

$*$ f est dite nulle sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$

Définition. Soit $f : U \longrightarrow R$ une fonction. On dit que :

- f est majorée sur U si $\exists M \in R \;\; \forall x \in U \quad f(x) \leq M$
- f est minorée sur U si $\exists m \in R \;\; \forall x \in U \quad f(x) \geq m$
- f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists m, M \in R$ $\forall x \in U \quad m \leq f(x) \leq M$

Exemple. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. On a $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ donc f est bornée sur R.

Propriété Si f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ alors f est bornée.

2.2.5 Parité d'une fonction

1) Fonction paire

Définition. On dit qu'un fonction f est paire si et seulement si l'on a :

$*$ Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à l'origine.

$*$ $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Exemple. Les fonctions suivantes sont paire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^2 + 3, f(x) = \cos x, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Propriété 1. La représentation d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir figure 2.3).

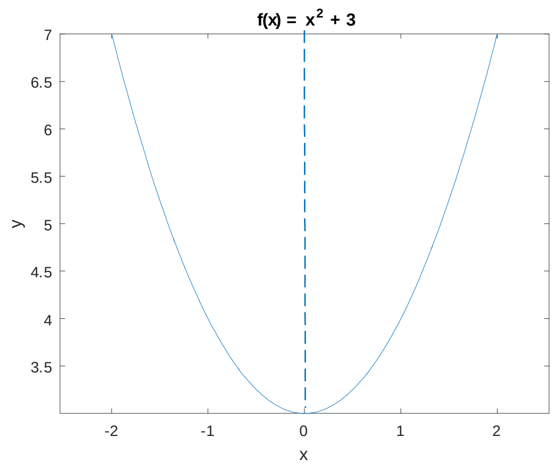


FIG. 2.3 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 3$

2) Fonction impaire

Définition. On dit qu'un fonction f est impaire si et seulement si l'on a :

$*$ Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à l'origine.

$*$ $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Exemple. Les fonctions suivantes sont impaire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^3, f(x) = \sin x, f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété 2. La représentation d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine (voir figure 2.4).

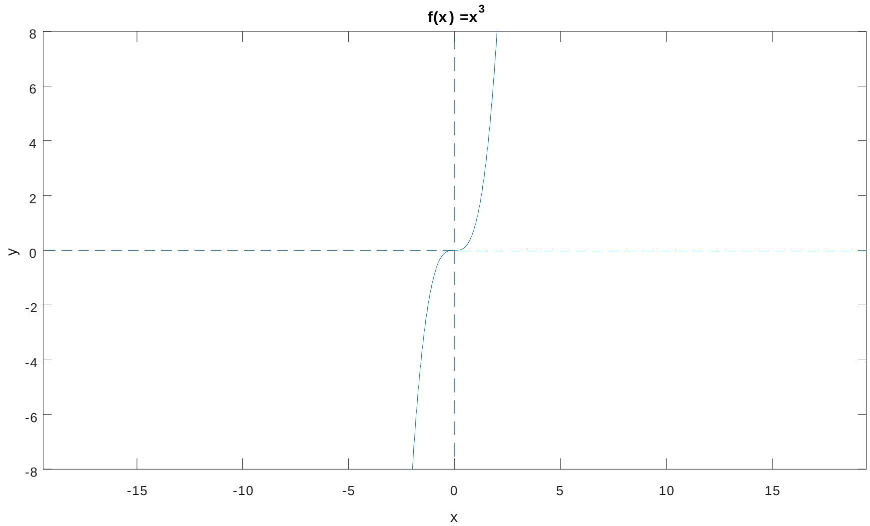


FIG. 2.4 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^3$

Centre de symétrie

Soit un point $A(a,b)$, $a, b \in R$ et $f : D \longrightarrow R$ est une fonction vérifie : pour tout x de D tel que $a - x$ et $a + x \in D$, C_f est sa courbe.

$A(a,b)$ est centre de symétrie de $C_f \iff f(2a - x) + f(x) = 2b$ (ou $f(a-x) + f(a+x) = 2b$)

Axe de symétrie

Soit une droite verticale de l'équation $x = a, a \in R$ et $f : D \longrightarrow R$ est une fonction vérifie : pour tout x de D tel que $a - x$ et $a + x \in D$, C_f est sa courbe.

$x = a$ est axe de symétrie de $C_f \iff f(2a - x) = f(x)$ (ou $f(a-x) = f(a+x)$)

Exemples. 1) Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ est définie sur $R - \{1\}$. Le point $A(1,2)$ est centre de symétrie de C_f car pour tout x de $R - \{1\}$ on a $1 - x$ et $1 + x \in R - \{1\}$

$$f(2-x) + f(x) = \frac{2(2x-1)-1}{2-x-1} + \frac{2x-1}{x-1} = 4$$

2) $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Son ensemble de définition est R. Pour tout x de , $1 - x$ et $1 + x \in R$

, $f(1-x) = (1-x)^2 - 2(1-x) - 3 = x^2 - 4$, et

$f(1+x) = (1+x)^2 - 2(1+x) - 3 = x^2 - 4$; $f(1-x) = f(1+x)$, donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

2.2.6 Composée de deux fonctions

Définition. Soit deux fonctions f et g avec $f(D_f) \subset D_g$. On appelle fonction composée de f par g, la fonction notée : $g \circ f$ telle que :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Exemple 1. Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x + 3$$

Les deux fonctions étant définies sur R, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur R. On a :

$$g \circ f(x) = g(x-2) = 4x - 5$$
$$f \circ g(x) = f(4x+3) = 4x + 1$$

On remarque que $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

Exemple 2. Soit les deux fonctions suivantes f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ après avoir précisé les ensembles de définition.

Solution. On détermine $D_f = R - \{-1\}$ et $D_g = R$.

Comme la fonction g est définie sur R, $D_{g\circ f} = D_f$, on a alors :

$$g \circ f\,(x) = \frac{3}{x+1}$$

Pour $f \circ g$, on doit enlever la valeur : $g(x) = -1$, soit $3x = -1$ et donc $x = -\frac{1}{3}$

$$D_{f\circ g} = R - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{et} \quad f \circ g\,(x) = \frac{1}{3x+1}$$

2.3 Limites de fonctions

2.3.1 Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle I de R. Soit $x \in R$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition. Soit $l \in R$. On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\; \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f\,(x) - l| < \delta$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f\,(x) = l$

2.3.2 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

1) On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f\,(x)$.

2) On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f\,(x)$

Exemples. On a les limites suivantes

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+2}=2$$
$$\lim_{x\longrightarrow1^+}\frac{1}{\sqrt{x}-1}=+\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow0}(\ln x+e^x)=-\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow(\sqrt{2})^-}\frac{2x+1}{x^2-2}=-\infty$$

proposition Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Les cas indéfinis : Voici les cas indéfinis pour les limites de fonctions $+\infty-\infty; 0\times\infty; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 1^\infty; \infty^0$.

2.3.3 Droite asymptote

Courbe d'équation y = f(x)

Les asymptotes sont à rechercher lorsque x ou $f(x)$ tend vers l'infini. Dans ce qui suit, on utilisera les notations a et b pour désigner des nombres réels, donc finis.

Asymptote verticale

La droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f (en a) si

$$\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=\pm\infty$$

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale à la courbe d'équation $y=f(x)$, si

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}f(x)=b$$

Asymptote oblique

La droite d'équation $y=ax+b$ (a étant ici différent de 0) est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

Exemples. Soit la fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x^2+6x-5}{x+1}$. On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
donc $x = -1$ est symptote verticale à la courbe de f. On peut écrire f sous la forme $f(x) = x+5-\dfrac{10}{x+1}$ on a $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) - (x+5) = 0$ alors la droite d'équation $y = x+5$ est asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$.

2.4 Continuité d'une fonction

2.4.1 Continuité en un point

Définition. Soit I un intervalle de R et $f : I \Longrightarrow R$ une fonction.

1) On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

2) On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples. Les fonctions suivantes sont continues :

- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \longrightarrow \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sin et cos sur R,
- la fonction valeur absolue $x \longrightarrow |x|$ sur R,
- la fonction exp sur R,
- la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1. Soient $f, g : I \longrightarrow R$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in R$),
- $f + g$ est continue en x_0,

• $f \times g$ est continue en x_0,

• si $f(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

Exemples. La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

• les fonctions puissance $x \longrightarrow x^n$ sur R (comme produit $x \times x \times \cdots$),

• les polynômes sur R (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),

• les fractions rationnelles $x \longrightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

Proposition 2. Soient $f : I \longrightarrow R$ et $g : J \longrightarrow R$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2.4.2 Prolongement par continuité

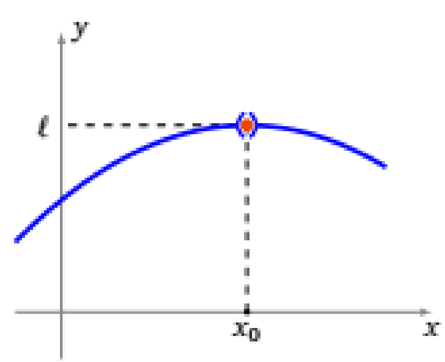
Définition. Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow R$ une fonction.

• On dit que f est **prolongeable** par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

• On définit alors la fonction $\overline{f} : I \longrightarrow R$ en posant pour tout $x \in I$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\overline{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.



Exemple. Considérons la fonction f définie sur R^* par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in R^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\overline{f}$ définie sur R par :

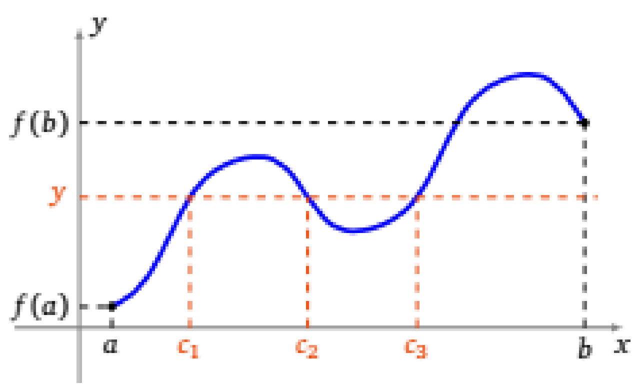
$$\overline{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.4.3 Continuité sur un intervalle

Théorème (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow R$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Corollaire.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow R$ une fonction continue sur un segment

$$\text{Si } f(a) f(b) < 0, \text{ alors il existe } c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = 0$$

Exemple. L'équation $f(x) = x^5 - 3x - 2 = 0$ admet une solution sur $[1.2]$ car $f(1) = -4$ et $f(2) = 24$ et la fonction f et continue sur R.

2.5 Injection, surjection, bijection

2.5.1 Définitions

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, où E et F sont des parties de R.

1) On dit que f est injective si

$$\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

2) On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F \ \exists x \in E \quad f(x) = y$$

3) f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F \ \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

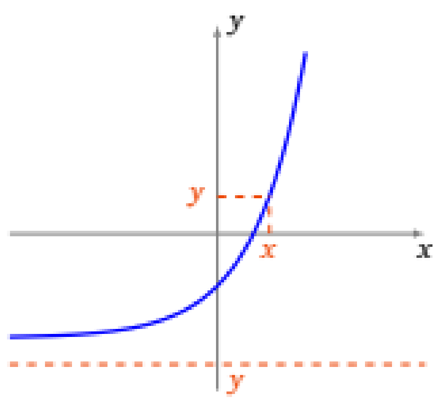


FIG. 2.5 – Le graphe d'une fonction injective

Exemples. 1) Soit la fonction $f : R \longrightarrow R$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Montrons que f est injective :

$$\forall x, x' \in R \ f(x) = f(x') \Longrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x'+1} \Longrightarrow x = x'$$

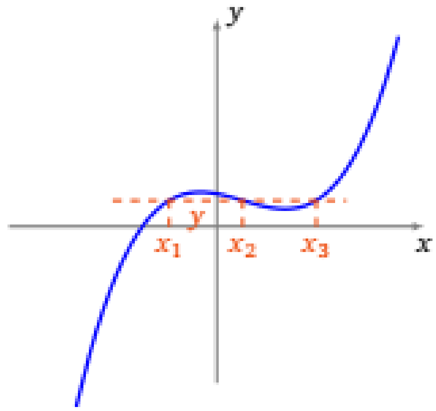


FIG. 2.6 – Le graphe d'une fonction surjective

Par contre f n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f, par exemple $y = 0$ n'a pas d'antécédent. Ainsi f n'est pas surjective $\left(\frac{1}{x+1} = y \Longrightarrow x = \frac{1}{y} - 1\right)$.

2) Soit la fonction $f : R^{+} \longrightarrow R^{+}$ définie par $f(x) = x^2$. On a

$$f(x) = y \text{ c-à-dire } x^2 = y \Longleftrightarrow x = \sqrt{y} \text{ pour } x \in R^{+}, y \in R^{+}$$

donc il existe une solution unique de l'équation $f(x) = y$. Alors f est bijective.

Théorème (Théorème de la bijection).

Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle I de R. Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors

1. f établit une **bijection** de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,

2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

2.5.2 Fonction réciproque

Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction **bijective** alors il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection **réciproque** de f et se note f^{-1}.

où l'identité, $id_E : E \longrightarrow E$ est simplement définie par $x \longrightarrow id_E(x) = x$

Remarque. Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (voir figure 2.7).

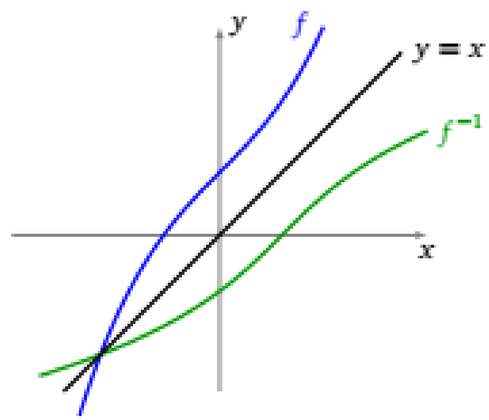


FIG. 2.7 – Les graphes des fonctions f et f^{-1}

Exemples. 1) La fonction $f : R^+ \longrightarrow R^+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective, donc il existe une fonction réciproque $f^{-1} : R^+ \longrightarrow R^+$ telle que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

2) Soit $f : R^+ \longrightarrow R^+$ définie par $f(x) = x^n, n \geq 1$. Alors f est continue et strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors f est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} est notée :$x \longrightarrow x^{\frac{1}{n}}$ (ou aussi $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$) : c'est la fonction racine $n-$ième. Elle est continue et strictement croissante.

2.6 Dérivée d'une fonction

2.6.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de R et $f : I \longrightarrow R$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.

f est **dérivable** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad (1)$$

On pose $h = x - x_0$. La relation (1) devient

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Définition 2.

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \longrightarrow f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f , elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

Exemples. 1) La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en $x_0 = 1$ car

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \frac{0}{0} \text{ (cas indéfini)}$$

On va multiplier par l'expression conjuguée

$$\begin{aligned} \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

2) La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in R$. En effet :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 2x_0$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

2.6.2 Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. A' la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$.

Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple. L'équation de la tangente (T) à la courbe d'une fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ est

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Proposition.

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction.

• Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

• Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque. La réciproque est fausse : par exemple, la fonction $x \longrightarrow |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

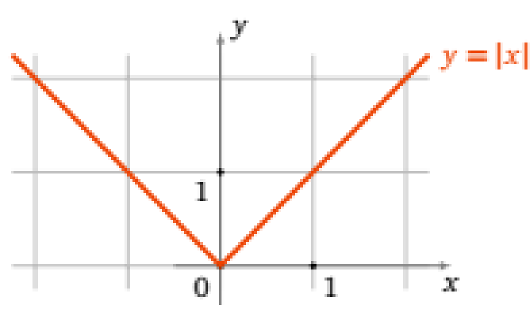


FIG. 2.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = |x|$

En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

2.6.3 Calcul des dérivées

Proposition

Soient $f, g : I \longrightarrow R$ deux fonctions dérivables sur I. Alors les égalités de fonctions :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$ où λ est un réel fixé.
- $(f \times g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable.

Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \longrightarrow u(x)$.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1}\,(n \in Z)$	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}\,(\alpha \in R)$	u^α	$\alpha u' u^{\alpha-4}\,(\alpha \in R)$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan u$	$u'\,(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque

- Notez que les formules pour x^n, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et x^α sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle.

Par exemple $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et donc

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$$

• Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = \exp(x \ln 2)$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} = \ln 2.2^x$.

Exemples. 1) Calculons la dérivée $f(x) = 3x^3 + 2x + 5$. On a $f'(x) = 9x^2 + 2$

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x - 1}$ donc

$$f'(x) = \frac{\left(2x + \frac{1}{x}\right)(x-1) - 1.\left(x^2 + \ln x\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - \frac{1}{x} - \ln x + 1}{(x-1)^2}$$

.

Composition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$f(\circ g)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\frac{f(\circ g)(x) - f(\circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Exemple. Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \dfrac{1}{x}$; et $f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$ est

$$f(\circ g)'(x) = g'(f(x)).f'(x) = g'\left(1 + x^2\right).2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Dérivées successives

Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f\prime : I \longrightarrow R$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f' \text{ et } f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la **dérivée** $n-$**ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est n **fois dérivable**.

Exemples. 1) Calculons les dérivées seconde de $f(x) = e^x(x^2+1)$. On a

$$f'(x) = e^x(2x) + e^x\left(x^2+1\right) = e^x\left(x^2+1+2x\right)$$
$$f''(x) = e^x(2x+2) + e^x\left(x^2+1+2x\right) = e^x\left(x^2+4x+3\right)$$

2) Soit $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$ alors

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 15x^2 + 4x$$
$$f^{(2)}(x) = f''(x) = 30x + 4$$
$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = 30$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

donc $f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 4$

2.6.4 Variation d'une fonction et sa dérivée

Soit $f : [a,b] \longrightarrow R$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f$ est croissante ;

2. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f$ est décroissante ;

3. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f$ est constante ;

4. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) > 0 \Longleftrightarrow f$ est strictement croissante ;

5. $\forall x \in]a,b[\ f'(x) < 0 \Longleftrightarrow f$ est strictement décroissante.

Remarque.

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \longrightarrow x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Exemple. Soit la fonction f

$$f : R^* \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x}$$

limites : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. On en déduit que $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

On étudie la variation de f : on a $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in R^*$, donc f est strictement décroissante.

2.6.5 Règle de l'Hospital

Corollaire (Règle de l'Hospital)

Soient $f, g : I \longrightarrow R$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \backslash \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\text{si } \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \, (l \in R) \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Exemple. Calculer la limite en 1 de $\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2+x-1), f(1) = 0, f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \dfrac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0,1], x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{x_0\}$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = 3$$

donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$

2.7 Exercices du chapitre 2

EXERCICE 2.1

Déterminer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}; \qquad 2) \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$$
$$3) \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2(x)}; \qquad 4) \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

LA SOLUTION **1)** On a $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{0}{0}$. Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$$

2) On a $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$. On utilise la même méthode, on obtient

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{x-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

on a

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)} \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

3) On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \dfrac{0}{0}$. Il s'agit d'une forme inderterminée, nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2))'}{(\sin^2(x))'} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2\cos x \sin x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \frac{1}{\cos x\,(x^2+1)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

4) Posons $t = x - 1 \Longleftrightarrow x = t + 1$

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(t+1)}{t}$$

Première méthode

On sait d'après le programme de terminale que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Deuxième méthode

On utilise la règle de L'Hospital, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

EXERCICE 2.2. Soit $f : R \longrightarrow R$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

LA SOLUTION Notons déjà que cette fonction est définie sur R et continue sur R^* il reste à étudier la continuité en 0. D'autre part $\sqrt{x^2} = |x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x < 0$ et $x > 0$.

Si $x < 0$ alors $f(x) = x + \frac{-x}{x}$ donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Si $x > 0$ alors $f(x) = x + \frac{x}{x}$ donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Par conséquent

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

EXERCICE 2.3 Les fonctions f, g et $h : R \longrightarrow R$ définies par

$$1) f(x) = x|x|, 2) g(x) = x^{\frac{5}{3}}, 3) h(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0.

LA SOLUTION

Soit on calcule la limite du taux de variation, soit on essaye de montrer que la fonction est dérivable en 0.

1) On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} |x| = 0$$

Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) Pour g, il y a un problème, est-ce que g est définie pour $x < 0$? La réponse est oui, mais ce n'est pas une évidence. En général $x \longrightarrow x^{\alpha}$ n'est pas définie pour $x < 0$, par exemple $x \longrightarrow x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas définie pour $x < 0$, lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in N$ et $q \in N$ et q impair alors $x \longrightarrow x^{\frac{p}{q}}$est définie sur R.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} x^{-\frac{2}{5}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \pm\infty$$

Selon que $x < 0$ ou que $x > 0$, ce qui est important c'est que cette limite n'est pas finie, donc g n'est pas dérivable en 0.

3) $h\left(0\right) = \cos\left(0\right) = 1$ donc

$$\frac{h\left(x\right) - h\left(0\right)}{x - 0} = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x}$$

Cette limite est indéterminée, on peut penser à utiliser la règle de L'Hospital. On a deux cas

$*$ Si $x < 0$, on pose $h = \sqrt{-x}$, donc $x = -h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = \frac{1 - \cos\left(h^2\right)}{h^2}$$

Maintenant il vaut mieux se souvenir du résultat connu en terminale qui dit que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(h^2\right)}{h^2} = \frac{1}{2}$$

Sinon, il faut appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite. Donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$*$ Si $x > 0$, on pose $h = \sqrt{x}$, donc $x = h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = \frac{\cos\left(h^2\right) - 1}{h^2}$$

Avec le même résultat

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui montre que le taux de variation de h en 0 n'a pas de limite, par conséquent h n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 2.4

Soit $f : R \rightarrow R$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(R) = [-1, 1]$.

3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection et trouver f^{-1}.

4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

LA SOLUTION

1) f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

2) $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 > 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1,1]$. Nous venons de montrer que $f(R)$ est exactement $[-1,1]$.

3) Soit $y \in [-1,1]\backslash\{0\}$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \dfrac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Pour $y = 0$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$. Donc pour $g : [-1,1] - \to [-1,1]$ nous avons trouvé un inverse $f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ défini par $f^{-1}(y) = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ si $y \neq 0$ et $f^{-1}(0) = 0$. Donc g est une bijection.

4) $f'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$, donc f est strictement positive sur $]-1,1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1,1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f , appelée $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, est une bijection.

EXERCICE 2.5 Soit f la fonction définie sur $R - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Étudier le sens de variation et les limites de f .

2. Dresser le tableau de variations de f .

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

4. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ?

5. Montrer que le point $A(1,2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

6. Tracer C_f ou la courbe de f.

LA SOLUTION

1. f est dérivable sur $R - \{1\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - (x-1)^2}$. On a $x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow$ $x = -1$ ou $x = 3$. Donc

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

f est donc croissante sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$, et f est décroissante sur $]1, 3] \cup [-1, 1[$.

limites : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

2. $f(-1) = -2, f(3) = 6$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation de f

3. Après division, $x^2+3 = (x+1)(x-1)+4$. Pour tout $x \neq 1, f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} =$ $x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$ (alors $a = 1, b = 1, c = 4$) .

4. La courbe C_f de f admet pour asymptote oblique la droite (Δ) : $y = x + 1$ en $\pm\infty$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$. Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de C_f.

5. $A(1, 2)$ est un centre de symétrie de C_f car : $R - \{1\}$ est symétrique et

$$f(1-x) + f(1+x) = 1 - x + 1 + \frac{4}{1-x-1} + 1 + x + 1 + \frac{4}{1+x-1} = 4$$

6. La figure (2.9) réprésente la courbe de f.

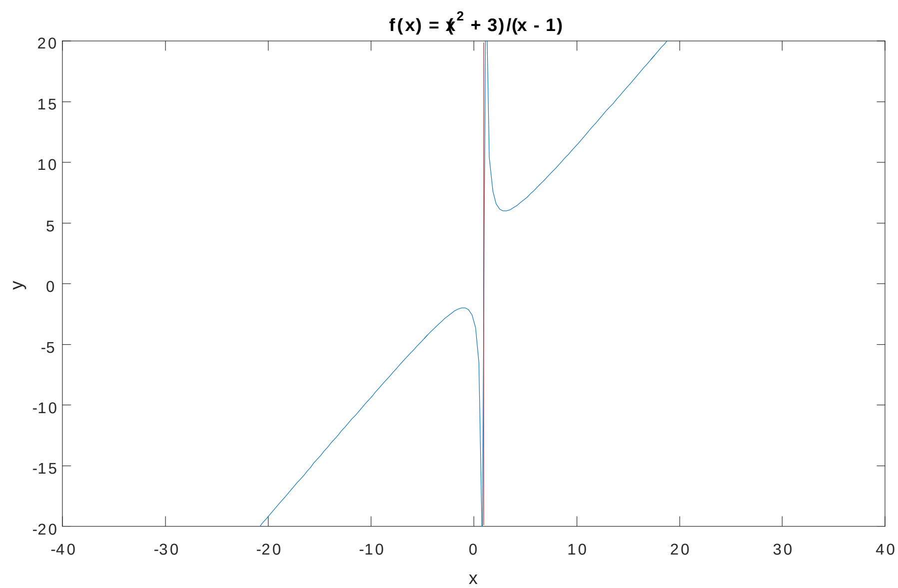


FIG. 2.9 – Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

Chapitre 3

Intégrales

3.1 Intégrale d'une fonction

3.1.1 Primitive d'une fonction

Définition. Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \longrightarrow R$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple. Soit $I = R$ et $f : R \longrightarrow R$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : R \longrightarrow R$ définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f . La fonction définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f .

Proposition.

Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction et soit $F : I \longrightarrow R$ une primitive de f . Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in R$.

Démonstration. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alor $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f.

Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f . Alors $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in R$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit $G(x) = F(x) + c$ (pour tout $x \in I$).

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)dt$ ou $\int f(x)dx$ ou $\int f(u)du$ (les lettres $t, x, u, ...$sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

La proposition nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F + c = \int f(t)dt$.

Attention : $\int f(t)dt$ désigne une fonction de I dans R alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément nous verrons que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

.

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

3.1.2 Propriétés des primitives

1. Linéarité

Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\lambda \in R$ alors λF est une primitive de λf .

Une autre formulation est de dire que pour tous réels λ, μ on a

$$\int (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int f(t)\, dt + \mu \int g(t)\, dt$$

2. Composée

$$\int u'(x) .f(u(x))\, dx = f(u(x)) + c$$

où u est une fonction continue et F une primitive de f.

Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x dx = e^x + c$ sur R
$\int \cos x dx = \sin x + c$ sur R
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ sur R
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \in N)$ sur R
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(\alpha \in R - \{1\})$ sur $]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$ sur R^*
$\int \cosh x dx = \sinh x + c$, sur R
$\int \sinh x dx = \cosh x + c$ sur R
$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$ sur R
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ sur $]-1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arg\sinh x + c$ sur R
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\cosh x + c$ sur $]1, +\infty[$

sachant que $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on note que arc et arg pour l'inverse d'une fonction trigonométrique.

Primitives des fonctions composées

fonction	une primitive
$u'u^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{u'}{u}$	$ln\|u\| + c$
$u' \sin u$	$-\cos u + c$
$u' \cos u$	$\sin u + c$
$u'e^u$	$e^u + c$

3.1.3 Intégrale d'une fonction continue

Théorème.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow R$ une fonction continue. La fonction $F : I \longrightarrow R$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est une primitive de f , c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples.

1. Pour $f(x) = e^{5x}$ une primitive est $F(x) = \frac{1}{5}e^x$ donc

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^x + c$$

2. Pour $g(x) = x^3$ une primitive est $G(x) = \dfrac{x^4}{4}$ donc

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{80}{4}$$

3. On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

4. On calcul l'intégrale $\int \frac{e^x}{2e^x+3} dx$, on pose $u = 2e^x + 3 \Longrightarrow u' = 2e^x$, donc

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{2e^x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln|u| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(2e^x + 3) + c \end{aligned}$$

Remarques.

1. Si f est **impaire** alors ses primitives sont **paires** . En déduire que $\int f(t)dt = 0$.

2. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Par exemple $\int e^{x^2} dx$.

3. En particulier si F est une fonction dérivable alors $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

3.1.4 Quelques propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, α et β deux constantes réelles.

Relation de Chasles

Soit $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité de l'intégrale et interprétation géométrique

Si de plus f est à valeurs positives sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est positive est égale à l'aire de la surface délimitée par le graphe de f au dessus de $[a, b]$ et l'axe des x.

Intégrales et inégalités

Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3.1.5 Intégration par parties – Changement de variable

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent des calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Intégration par parties

Théorème.

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

Notation. $[uv]_a^b = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$.

La preuve est très simple, En utilisant la dérivée de produit.

Exemple. 1. calcul de $\int_0^1 xe^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - e + e^0 = 1$$

2. Calcul de $\int \ln(x)\, dx$

Pour déterminer une primitive de $\ln x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\ln x = 1. \ln x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u = \ln x$ et $v' = 1$ et donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$ alors

$$\int 1. \ln x dx = x \ln x - \int x.\frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - x + c$$

Changement de variable

Théorème.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\phi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe C^1. Pour tout $a, b \in J$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\phi(t))\, .\phi'(t)\, dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) . \phi'$.

Exemples. Calculons la primitive $F = \int \tan(x)\, dx$

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

On reconnaît ici une forme $\dfrac{u'}{u}$ (avec $u = \cot t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$. Donc

$$F = -\int \frac{u'}{u} du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$$

2) calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$

Soit le changement de variable $u = \phi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \phi'(x)dx = -2xdx$. Pour $x = 0$ on a $u = \phi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \phi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\phi'(x) = -2x$, ϕ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{\frac{3}{2}}} du = -\frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-\frac{3}{2}} du \\
&= -\frac{1}{2} \left[-2u^{-\frac{1}{2}} \right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1
\end{aligned}$$

3.2 Exercices du chapitre 3

EXERCICE 3.1 Calculer les intégrales (ou primitives)

1. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$ 2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ 3. $\int \frac{3}{x^2+1} dx$ 4. $\int_1^{\sqrt{2}} (x^5 + 2x)\, dx$ 5. $\int (2x^2+1)\, e^x dx$

LA SOLUTION

1) On a

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 2x + 5 \right| + c$$

2) nous avons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -1$$

3) On calcul $\int \frac{3}{x^2+1} dx$

$$\int \frac{3}{x^2+1} dx = 3 \arctan x + c$$

4) On calcul de l'intégrale

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^3}+2x\right)dx=\left[\frac{x^{-2}}{-2}+2\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$$

EXERCICE 3.2

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x dx$ **2.** $\int \arctan x dx$

3. $\int_0^{\pi} \cos x \exp x dx$ **4.** $\int_0^2 x \exp x dx$

LA SOLUTION

1) On calcul $\int x^2 \ln x dx$

On pose

$$\begin{cases} u=\ln x \Longrightarrow u'=\frac{1}{x} \\ v'=x^2 \Longrightarrow v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3}\ln x-\int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+c\end{aligned}$$

2) On calcul $\int \arctan x dx$

On pose

$$\begin{cases} u=\arctan x \Longrightarrow u'=\frac{1}{x^2+1} \\ v'=1 \Longrightarrow v=x \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x-\int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c\end{aligned}$$

3) On calcul $\int_0^{\pi} \cos x \exp x dx$

En utilisant intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u = \cos x \Longrightarrow u' = -\sin x \\ v' = e^x \Longrightarrow v = e^x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos x e^x dx &= [e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x e^x dx \\ &= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi \sin x e^x dx \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode, on pose

$$\begin{cases} u = \sin x \Longrightarrow u' = \cos x \\ v' = e^x \Longrightarrow v = e^x \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x e^x dx &= [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^x dx \\ &= -\int_0^\pi \cos x e^x dx \end{aligned}$$

En fin on trouve

$$\int_0^\pi \cos x e^x dx = \frac{-e^\pi - 1}{2}$$

4) On Calcul $\int_0^2 x \exp x dx$

On pose

$$\begin{cases} u = x \Longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^x \Longrightarrow v = e^x \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \exp x dx &= [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

EXERCICE 3.3

Calculer les primitives suivantes par changement de variable

1. $\int x^2\sqrt{1-x}dx$ 2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 3. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 4. $\int \cos(\ln x)\, dx$.

LA SOLUTION

1)

$$\int x^2\sqrt{1-x}dx$$

Effectuons le changement de variable

$$x = 1 - t$$

$$dx = (-1)\, dt$$

$$t = 1 - x$$

donc

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x}dx = \int \left(1-t^2\right)(-1)\sqrt{t}dt &= \int \left(-t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt \\ &= -\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c\Big|_{t=1-x} \\ &= -\frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

2)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Effectuons le changement de variable

$$x = \cos t$$
$$dx = -\sin t dt$$
$$t = \arccos x$$

Pour $x = 1$ et $x = -1$ on obtient $t = 0$ et $t = \pi$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{0}^{\pi} \frac{-\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} dt = \\
&= -\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt \\
&= \int_{0}^{\pi} -dt \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

3) On calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{1}^{4} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{x} \Longrightarrow x = u^2 \Longrightarrow dx = 2udu$$

Et on en déduit la valeur de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{4} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_{1}^{2} \frac{1-u}{u} 2udu \\
&= \int_{1}^{2} 2\left(1-u\right) du \\
&= \left[2u - u^2\right]_1^2 \\
&= -1
\end{aligned}$$

4) On détermine la primitive de la fonction

$$\int \cos(\ln x)\, dx$$

Il s'agit ici d'intégrer une fonction composée $f(g(x))$. Nous effectuons donc "classiquement" le changement de variable $u = \ln x \Longrightarrow x = e^u \Longrightarrow dx = e^u du$. L'intégrale devient :

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \int \cos(u) \exp(u)\, du$$

D'aprés l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln x)\, dx &= \int \cos(u) \exp(u)\, du \\ &= \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + c\Big|_{u=\ln x} \\ &= \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] E. Azoulay, Les Mathématiques, cours et exercices résolus, 3e édition. Ediscience 1983, DUNOD 2002.

[2] Jacques Vélu : Mathématiques Générales, Cours et exercices corrigés. 1er cycle,CNAM cycle A, IUT. DUNOD 2000.

[3] Francois Liret et Dominique Martinais, Cours de Mathématiques, Analyse 1re Année, Cours et exercices avec solutions. DUNOD 1997.

[4] Kada Allab, Éléments d'analyse. Tome 1 et 2. Edition Paris Ellipses impr. 2012.

[5] V. Smirnov, Cours de Mathématiques Supèrieures. Editions Mir - Moscou - 1981.

[6] Murray R. Spiegel, Variables complexes cours et problèmes (série schaum).

[7] René David, Karim Nour et Christophe Raffalli, Introduction à la logique : Théorie de la démonstration, cours et exercices corrigés, Dunod 2001.

[8] Philippe Pilibossian et Jean-Pierre Lecoutre, Analyse, Cours et exercices corrigés, DUNOD 2005.

[9] Jacques Labelle et Armel Mercier. Introduction à l'analyse réelle. Modulo, Canada, 1993.

[10] Walter Rudin. Principes d'analyse mathématique. Ediscience, Paris,1995.

[11] Charles Cassidy et Marie-Louis Lavertu. Introduction à l'analyse. Presses de l'Université Laval, Québec, 1994.

Annexe : Logique mathématiques

Proposition. Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » est la proposition. Il est facile de démontrer que la proposition est fausse. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

Equivalence logique

Définition. Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses noté $P \iff Q$.Ainsi, la table de vérité de l'équivalence logique $P \iff Q$ est (vraie noté **v** et fausse noté **f**)

P	Q	$P \iff Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Soient P et Q deux propositions. On peut définir les propositions « P ou Q », notée $P \vee Q$, et « P et Q », notée $P \wedge Q$ par les tables de vérité ci-dessous

P	Q	$P \wedge Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

P	Q	$P \vee Q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Implication logique

Définition. Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique : $P \Longrightarrow Q$ par sa table de vérité

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Définition.

1. La proposition : « Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit en abrégé : « $\forall x \in E, P(x)$ ».

2. La proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit en abrégé : « $\exists x \in E, P(x)$ ».

3. La proposition : « il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit en abrégé : « $\exists! x \in E, P(x)$».