1/المنطق (la logique)

1.1 القضايا (Les assertions):

القضية هي أي عبارة يمكن الحكم عليها بالصحة او الخطأ ولكن ليس الإثنين معا.

مثال:

- إنها تمطر

- $2+2=4$ - $2\times3=7$

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $x^2 \geq 0$

إذا كانت P قضية وQ قضية أخرى، يمكننا تعريف قضايا أخرى بواسطة P وQ.

الوصل "$\wedge$":

القضية ⟪P و Q⟫ صحيحة إذا كانت القضايا P و Q صحيحتان معا وإلا نقول هذه القضية خاطئة.

ونلخص هذا في جدول الحقيقة:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الفصل "$\vee$":

القضية ⟪P أو Q⟫ صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى القضيتين صحيحة.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

النفي:

القضية نفي P أو $\overline{P}$ تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة.

الاستلزام: "$\Rightarrow$" (L'implication)

التعريف الرياضي هو

القضية "$\overline{P} \vee Q$" نرمز لها ب " $P \Rightarrow Q$ " . إذن جدول الحقيقة لها هو:

$\overline{P}$	P	Q	$\overline{P} \vee Q \ (P \Rightarrow Q)$
0	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1

التكافؤ: "$\Leftrightarrow$" (L'équivalence)

التكافؤ معرف كما يلي:

"$Q \Leftrightarrow P$" هي القضية " $P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$ "

هذه القضية تكون صحيحة إذا كانت القضيتين P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1

فرضية: قضية

لتكن P و Q و R ثلاث قضايا لدينا القضايا (الصحيحة) التالية:

1- $P \Leftrightarrow \overline{(\overline{P})}$
2- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
3- $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
4- $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
5- $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
6- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
7- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
8- $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

البرهان:

1-باستعمال جدول الحقيقة

P	$\overline{P}$	$\overline{(\overline{P})}$
1	0	1
0	1	0

من خلال جدول الحقيقة نلاحظ أن $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$

-5

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1. 2 المكممات (Quantificateurs):

المكمم: $\forall$ (مهما يكن)

يمكن أن تكون القضية P مرتبطة بمتغير x، مثلا " $x^2 \geq 1$ " عندها تكون القضية P صحيحة أو خاطئة وذلك حسب قيمة x القضية

$$\forall\, x \in E, \quad P(x)$$

تكون صحيحة إذا كانت القضية $P(x)$ من أجل كل x من E

مثال:

$\forall\, x \in [1 , +\infty[, \qquad (1 \leq x^2)$ قضية صحيحة

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad (x^2 \geq 1)$ قضية خاطئة

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ قضية صحيحة

المكمم: $\exists$ (يوجد على الأقل)

القضية $P(x)$ $\exists\, x \in E$ ، صحيحة إذا كان على الأقل عنصر x من E حيث $P(x)$ صحيحة

نفي المكممات:

نفي "$\forall x \in E \quad P(x)$" هو "$\exists x \in E \quad \overline{P(x)}$"

نفي "$\exists x \in E, \quad P(x)$" هو "$\forall x \in E, \quad \overline{P(x)}$"

مثال:

نفي "$\exists z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 = 0$" هو "$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 \neq 0$"

نفي "$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+1 \in \mathbb{Z}$" هو "$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x+1 \notin \mathbb{Z}$"

نفي "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0 \quad (x+y > 10)$" هو "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 \quad (x+y \leq 10)$"

ملاحظة: ترتيب المكممات ضروري.

مثال:

القضيتين:

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x+y>0)$ و $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad (x+y>0)$

مختلفتين فالأولى صحيحة و الثانية خاطئة

القضية الأولى مهما يكن x من $\mathbb{R}$ يوجد y (والذي يمكن أن يكون ب x) حيث $x+y>0$

(مثلا يمكن أخذ $y=x-1$)

بينما القضية الثانية يوجد y حيث مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $x+y>0$ و هذه القضية خاطئة يكفي أخذ $x=-y$.

2 البرهان:

2. 1. البرهان المباشر: (Raisonnement direct)

لإثبات أن" $P \Rightarrow Q$ "صحيحة. نفرض أن P صحيحة ونثبت أن Q صحيحة

2. 2. البرهان بالعكس النقيض:(contraposée)

البرهان بالعكس النقيض يعتمد على القضية التالية:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

إذن لإثبات القضية $P \Rightarrow Q$ يكفي إثبات القضية المكافئة لها و هي $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

2. 3. البرهان بالخلف: (Absurde)

لإثبات أن $P \Rightarrow Q$ نفرض أن P و $\overline{Q}$ صحيحتين معا ونبحث عن تناقض وبالتالي إذا كانت P صحيحة فإن Q صحيحة.

مثال:

باستعمال البرهان بالعكس النقيض أثبت أن

$$\forall n \in N: n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$$

نفرض أن

$n \notin 2\mathbb{N}$ ومنه يوجد $k \in N$ حيث

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\boldsymbol{l} + 1 \notin 2\mathbb{N}$$

ومنه

$$n \notin 2N \Rightarrow n^2 \notin 2\mathbb{N}$$

باستعمال البرهان بالخلف أثبت أن

$$\forall a, b \geq 0: \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

$$(a \neq b) \wedge \left(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}\right) \Rightarrow (a \neq b) \wedge ((1+b)b = (1+a)a)$$

$$\Rightarrow (a \neq b) \wedge (b + b^2 = a + a^2)$$

$$\Rightarrow (b^2 - a^2 = a - b) \wedge (a \neq b)$$

$$\Rightarrow ((b-a)(b+a) = a - b) \wedge (a \neq b)$$

$$\Rightarrow b = -1 - a \wedge a \neq b$$

تناقض مع كون $a, b \geq 0$ ومنه $a = b$

وهناك براهين أخرى كالبرهان بالتراجع والبرهان باستعمال مثال مضاد.

تمارين: أثبت ما يلي باستعمال:

1. البرهان المباشر

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+: a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \cap a \leq \sqrt{ab} \leq b$$

2. البرهان بالعكس النقيض أو بالخلف

$$\forall\, a, b \in Z: \quad b \neq 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

(نستعمل $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

3. بالعكس النقيض

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{Z}$$

4. مثال مضاد

$$x \in \mathbb{R}, \quad x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$$

5. بالتراجع

$$\forall\, n \geq 1, 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x \geq 0, \ \forall\, n \geq 1, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$