2/التطبيقات والدوال:

1.2 تعريف: نسمي تطبيق من مجموعة E نحو مجموعة F كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر وحيد y من F حيث $f(x) = y$.

$y = f(x)$ يسمى صورة x (Image)

x يسمى سابقة y (antécédant)

ونكتب:

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

f تطبيق $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E : [(x = x') \Rightarrow (f(x) = f(x'))]$

أمثلة:

1. التطبيق

$$Id_E : E \longrightarrow E$$
$$x \mapsto Id_E(x) = x$$

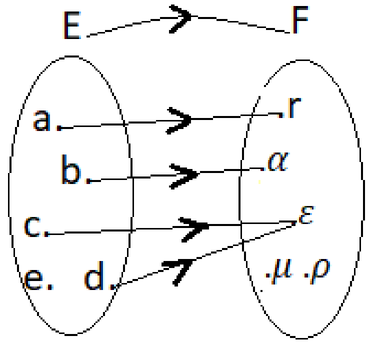
يسمى التطبيق الحيادي على E.

2. التطبيق

$$f : E \longrightarrow E$$
$$x \mapsto f(x) = a$$

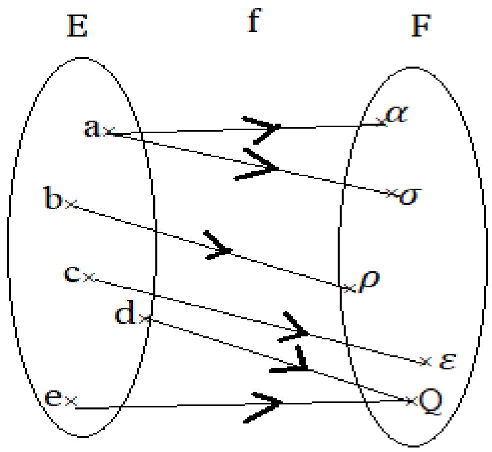
يسمى التطبيق الثابت.

3.



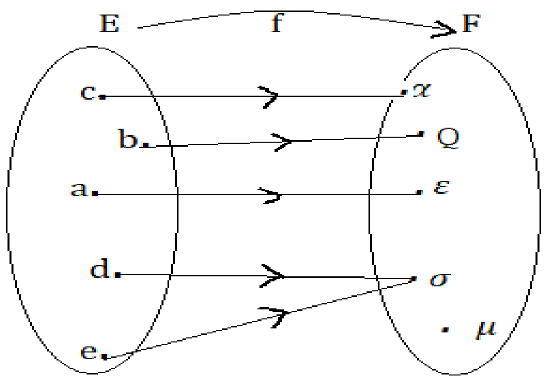
f ليس تطبيق لأن e ليس لديه صورة.

.4



f ليس تطبيق لأن العنصر a لديه صورتان.

.5



f عبارة عن تطبيق.

تعريف: نقول عن تطبيقين f و g أنهما متساويان إذا كان:

1. لديهما نفس مجموعة البدئ ونفس مجموعة الوصول.
2. $\forall\ x \in E \quad f(x) = g(x)$

2.2 تركيب التطبيقات:

تعريف: ليكن التطبيقان $f : E \longrightarrow F$ و $g : F \longrightarrow G$ نرمز بـ $(g \circ f)$ التطبيق المعرف بـ:

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

$$x \mapsto (g \circ f)(x)$$

حيث $\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x))$

هذا التطبيق يسمى تركيب التطبيقين f و g.

مثال: ليكن التطبيقان

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto x^2 \qquad\qquad x \mapsto x^3$$

إذن:

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto (x^2)^3 = x^6$$

$(f \circ g)$ لا يمكن تعيينه.

اقتصار وتمديد تطبيق: ليكن التطبيق $f : E \longrightarrow F$

1. نسمي اقتصار f على مجموعة X من E، التطبيق $g : X \longrightarrow F$
   حيث: $\forall x \in X,\ g(x) = f(x)$
   ونرمز لها بـ: $g = f/X$
2. ليكن G مجموعة حيث $E \subset G$، نسمي تمديد لـ f على G كل تطبيق h من G نحو F حيث f هو إقتصار h على E.

ملاحظة: إذا كان F يحوي على أكثر من عنصر فإن التمديد ليس وحيد.

مثال:

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto log(x)$$

إذن $\quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ و $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log(2|x| - x) \qquad\qquad x \mapsto log|x|$$

g و h تمديدان لـ f على $\mathbb{R}$.

3.2. الصورة والصورة العكسية:

تعريف: ليكن $A \subset E$ و $M \subset F$

1. نسمي صورة A بواسطة f، مجموعة صور عناصر A ونكتب :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

2. نسمي الصورة العكسية لـ M بواسطة f المجموعة المتكونة من سوابق المجموعة M ونكتب :

$$f^{-1}(M) = \{x \in E, f(x) \in M\} \subset E$$

لدينا:

$$\forall y \in F, \left(y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A, y = f(x)\right)$$

$$\forall x \in E, (x \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(x) \in M)$$

توطئة: ليكن

$$f: E \longrightarrow F \text{ و } A, B \subset \mathrm{E} \text{ و } N, M \subset \mathrm{F}$$

إذن:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}(C_F^M) = C_E^{f^{-1}(M)}$

برهان:

1. إثبات أن $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ليكن $y \in F$ حيث:

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists\, x : x \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \wedge y = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x : (x \in A \vee x \in B) \wedge \left(y = f(x)\right) \\
&\Leftrightarrow \exists\, x : \left(x \in A \wedge y = f(x)\right) \vee \left(x \in B \wedge y = f(x)\right) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in (f(A) \cup f(B))
\end{aligned}$$

4.2. التطبيق الغامر، المتباين، التقابلي:

تعريف: نقول أن:

1. f متباين إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأكثر.
2. f غامر إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأقل.
3. f تقابلي إذا كان متباين وغامر في آن واحد.

ونكتب:

f متباين $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \left(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right)$

f متباين $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

f غامر $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E: f(x) = y$

f تقابلي $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E: f(x) = y$

التطبيق العكسي:

توطئة: نقول عن التطبيق $f : E \longrightarrow F$ أنه تقابلي إذا وفقط إذا وجد تطبيق $g : F \longrightarrow E$ حيث:

$$f \circ g = Id_F \quad \text{و} \quad g \circ f = Id_E$$

يسمى g في هذه الحالة التطبيق العكسي لـ f ونرمز له بـ f^{-1}.

برهان:

1. نفرض أنه يوجد $g : F \longrightarrow E$ حيث:

$$f \circ g = Id_F \quad \text{و} \quad g \circ f = Id_E$$

ونبين أن f تقابل.

أ/ f غامر

ليكن $y \in F$ لدينا:

$$y \in F \Rightarrow (f \circ g)(y) = y$$
$$\Rightarrow f(g(y)) = y$$

لدينا: $g(y) \in E \Rightarrow \exists x \in E : g(y) = x$

ومنه: $f(x) = y$

ومنه: $\forall y \in F, \exists x \in E: f(x) = y$

ب/ f متباين ليكن $x, x' \in E$ حيث $f(x) = f(x')$ إذن

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) \Rightarrow (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$$
$$\Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين.

2. نفرض أن f تقابلي أي لكل عنصر y من F يوجد $x \in E$ وحيد حيث

$$f(x) = y$$

ليكن التطبيق التالي:

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ y &\mapsto g(y) = x \end{aligned}$$

لدينا إذن:

$$\begin{aligned} g\circ f : E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big) = g(y) = x \end{aligned}$$

إذن: $g\circ f = Id_E$

$$\begin{aligned} f\circ g : F &\longrightarrow F \\ y &\mapsto f\circ g(y) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y \end{aligned}$$

إذن: $f\circ g = Id_F$

3. إثبات وحدانية g:

ليكن: $g_1 : F \longrightarrow E$ حيث

$$\begin{cases} g_1\circ f = Id_E \\ f\circ g_1 = Id_F \end{cases}$$

إثبات أن: $g_1 = g$

$$\begin{aligned} \forall y \in F \ : \ g_1(y) = \ & g_1\big(f(x)\big) = g_1\circ f(x) = Id_E(x) \\ &= g\circ f(x) \\ &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(y) \end{aligned}$$

إذن: $g_1 = g$

مثال: ليكن التطبيق:

$$f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow F \quad /F \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+5}{x-2}$$

عين F لكي يكون f تقابلي وأعط التطبيق العكسي لـ f.

$$y \in F:\ y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+5}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow y(x-2) = x+5$$
$$\Leftrightarrow yx - x = 5 + 2y$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5+2y}{y-1} \quad si \quad y \neq 1$$

إذن: $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \exists\,!\, x = \frac{5+2y}{y-1} : y = f(x)$

بقي إثبات أن: $\frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

نفرض أن:

$$\frac{5+2y}{y-1} = 2$$

$\Leftrightarrow 2(y-1) = 5 + 2y \Leftrightarrow 5 = -2$ مستحيل

إذن: $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.