العلاقات الثنائية (Relations binaires):

تعريف: نسمي علاقة ثنائية على E كل علاقة تربط بين عنصرين من E تكون محققة أو لا ونرمز لها بـ $\mathcal{R}$ نكتب $x\,\mathcal{R}y$ ونقرأ: x على علاقة مع y .

1- علاقة التكافؤ:

يقال عن علاقة ثنائية في مجموعة E، نرمز لها بـ $\mathcal{R}$ أنها علاقة تكافؤ إذا كانت:

1. **إنعكاسية:**

$$\forall x \in E : \qquad x\,\mathcal{R}\,x$$

2. **تناظرية:**

$$\forall (x,y) \in E^2 : \; x\,\mathcal{R}\,y \;\Rightarrow\; y\,\mathcal{R}\,x$$

3. **متعدية:**

$$\forall (x,y,z) \in E^3 : \; (x\,\mathcal{R}\,y \wedge \; y\,\mathcal{R}\,z) \;\Rightarrow\; x\,\mathcal{R}\,z$$

أمثلة على علاقة التكافؤ:

1- في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعرف علاقة الموافقة بترديد 3 بـ

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : \; x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x - y = 3k \Leftrightarrow x \equiv y[3]$$

$\mathcal{R}$ عبارة عن علاقة تكافؤ.

1. $\mathcal{R}$ **انعكاسية:**

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \; x - x = 0 = 0 \times 3 \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,x$$

2. $\mathcal{R}$ **تناظرية:**

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : \; x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x - y = 3k \;/k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y - x = 3(-k) = 3k' \;\; / \; k' = -k$$

$$\Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$$

3. $\mathcal{R}$ **متعدية:**

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z} \; : x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow \; \exists\, k',k \in \mathbb{Z} \; :$$

$$\begin{cases} x-y=3k \\ y-z=3k' \end{cases} \Rightarrow x-z=3(k+k')$$

$$\Rightarrow x-z=3k'' \;\; / \, k''= \; k+k'$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية.

أصناف التكافؤ:

تعريف:

1. نقول صنف تكافؤ عنصر x من E تبعا لعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ مجموعة العناصر y من E التي لها علاقة $\mathcal{R}$ مع x نرمز لها بـ: C_x أو $\bar{x}$ أو $\dot{x}$

ونكتب: $\dot{x}=\{y\in E/\, y\,\mathcal{R}\,x\}, \dot{x}\subset \; E$

2. نسمي مجموعة أصناف التكافؤ لعناصر E مجموعة القسمة لـ E بواسطة $\mathcal{R}$ ويرمز لها بـ: ${}^{E}/_{\mathcal{R}}$:

$$ {}^{E}/_{\mathcal{R}}=\{\dot{x}/x\in E\} \qquad {}^{E}/_{\mathcal{R}}\subset \mathcal{P}(E)$$

لدينا الخصائص التالية:

1. $\forall x\in E \;:\; x\in\dot{x}$
2. $\forall x,y\in E \;:\; \dot{x}=\dot{y} \;\Leftrightarrow\; x\,\mathcal{R}\,y$
3. $\forall x,y\in E \;,\; \dot{x}\neq\dot{y} \;\Rightarrow\; \dot{x}\cap\dot{y}=\emptyset$
4. $E \;=\; \bigcup_{x\in E}\dot{x}$

البرهان:

1. لدينا بما أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ وبالتالي فهي انعكاسية

$\forall x\in E \;:\; x\,\mathcal{R}\,x \;\Rightarrow x\in\dot{x}$

.2

أ/ $\dot{x}=\dot{y}\Rightarrow x\,\mathcal{R}\,y$

لدينا: $x\in\dot{x}=\dot{y}\Rightarrow x\in\dot{y}\Rightarrow x\,\mathcal{R}\,y$

ب/ $x\,\mathcal{R}\,y\Rightarrow\dot{x}=\dot{y}$

نفرض أن $x\,\mathcal{R}\,y$ إذن:

$$z \in \dot{x} \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,x \ \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow \ z \in \dot{y}$$

ومنه: $\dot{x} \subset \dot{y}$

ليكن: $z \in \dot{y} \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,x \Rightarrow \ z \in \dot{x}$

ومنه: $\dot{y} \subset \dot{x}$

إذن: $\dot{x} = \dot{y}$

من أ و ب نستنتج 2

3. نفرض أن $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow \dot{x} \neq \dot{y}$

نفرض أنه $\dot{x} \cap \ \dot{y} \neq \emptyset$

إذن يوجد $z \in (\dot{x} \cap \ \dot{y})$

أي $z \in \dot{x}$ و $z \in \dot{y}$ ومنه $z\,\mathcal{R}\,x$ و $z\,\mathcal{R}\,y$

إذن $x\,\mathcal{R}\,y$ تناقض

ومنه $\dot{x} \cap \ \dot{y} = \emptyset$

4. $E =\cup_{x\in E}\dot{x}$

لدينا الاحتواء البديهي $E \sqsupset \cup_{x\in E}\dot{x}$ ، أما بالنسبة للاحتواء العكسي لدينا:

$$\forall z \in E \ \ : \ z \in \dot{z} \ \Rightarrow z \in \cup_{x\in E}\dot{x}$$

ملاحظة:

تسمح لنا النتيجتان 3 و 4 بالقول أن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة لـ E.

2- علاقة الترتيب:

أ/ نقول عن علاقة ثنائية $\mathcal{S}$ في E أنها علاقة ترتيب إذا كانت:

1- **إنعكاسية:** $\forall x \in E \ \ : \ \ x\mathcal{S}x$

2- **ضد تناظرية:** $\forall (x,y) \in E^2 : (x\ \mathcal{S}\ y \wedge y\mathcal{S}\ x) \Rightarrow x = \ y$

3- **متعدية:** $\forall (x,y,z) \in E^3 : (x\ \mathcal{S}\ y \wedge y\ \mathcal{S}\ z) \Rightarrow x\ \mathcal{S}\ z$

يرمز لعلاقة الترتيب في غالب الأحيان بـ $\leq$

- يقال عن علاقة الترتيب $\leq$ في مجموعة E أنها علاقة ترتيب كلي إذا كان أي عنصرين من E قابلين للمقارنة بمعنى: $\forall (x,y) \in E^2 \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$
- يقال عن علاقة ترتيب أنها عبارة عن علاقة ترتيب جزئي إذا لم تكن علاقة ترتيب كلي.

التفكيك القانوني لتطبيق:

ليكن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ نعرف على E العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة بالتطبيق f كما يلي:

$$\forall (x,y) \in E \ : x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

لدينا $\mathcal{R}$ عبارة عن علاقة تكافؤ.

يمكن تفكيك f إلى تركيب ثلاث تطبيقات كما يبين المخطط:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & F \\ E/_{\mathcal{R}} \arrow[r, "b"'] & f(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

ومنه $f = i \circ b \circ S$ حيث:

1- $S: E \longrightarrow E/_{\mathcal{R}}$ حيث $S(x) = \dot{x}$

عبارة عن تطبيق غامر

2- $b: E/_{\mathcal{R}} \longrightarrow f(E)$ تقابلي

$$\dot{x} \mapsto b(\dot{x}) = f(E)$$

3- $i: f(E) \longrightarrow F$

$$y \mapsto i(y) = y$$

ملاحظة:

في حالة كون تطبيق f غامر فإن $f(E) = F$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} i: F &\longrightarrow \quad F \\ y &\mapsto \quad i(y) = y \end{aligned}$$

يصبح $i = Id_F$

في هذه الحالة التفكيك يصبح $f = i \circ b \circ S = Id_F \circ b \circ s = b \circ s$

$$\begin{tikzcd} f: E \arrow[r] \arrow[d, "S"'] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$