جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2023/2022
2022/10/27

الاسم واللقب:.....

الفوج:.....
السنة الأولى (MI+رياضيات)
المقياس: جبر 1.

07/07

تصحيح **فرض رقم 01**

**تمرين 01:**

1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن: $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)\big)$

2) لتكن القضايا المنطقية التالية:

a) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}$ , $y$ يقسم $x$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$

d) $\exists x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = x$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ (مع التعليل) أعط نفي كل قضية.

3) أعط نفي كل من القضيتين المنطقيتين التاليتين:

a) $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \bar{Q}) \Rightarrow P$

b) $P \Rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \bar{Q})$

**تمرين 02:**

باستعمال البرهان بالعكس النقيض برهن أن:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Longrightarrow \frac{x+1}{y+1} \neq \frac{x-1}{y-1}$$

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة نبرهن أن: $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q))$

| P | Q | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $P \Leftrightarrow Q$ | ③ $(P \Leftrightarrow Q)$ | ① $P \wedge \bar{Q}$ | ② $\bar{P} \wedge Q$ | ④ ①∨② | ③⇔④ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

1,5

0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

ومنه: $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q))$

2) هل القضايا المنطقية صحيحة أم خاطئة مع اعطاء نفي كل قضية:

0,75 a) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}$ $y$ يقسم $x$

0,25 $\exists x = 1 \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}$ $y$ يقسم 1

0,25 ومنه: القضية (a) صحيحة

0,25 $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}$ $y$ يقسم $x$ : نفيها

0,75 b) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x > 0$

القضية (b) خاطئة. مثال مضاد

0,25 $\exists x = \pi \in \mathbb{R}$ $\cos \pi = -1 < 0$ 0,25

$\exists x \in \mathbb{R}$ $\cos x \leq 0$ نفيها: 0,25

0,75 d) $\exists x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = x$

$\exists x = 1 \in \mathbb{R}^+ : 1^2 = 1$ 0,25

0,25 ومنه: القضية (d) صحيحة

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \neq x$ نفيها: 0,25

0,75 c) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$

من أجل كل عدد طبيعي $x$ يوجد عدد طبيعي $y$ يحقق $(y = x^2 + 1)$ $x^2 + 1 > x^2$ 0,25

0,25 اذن: القضية (c) صحيحة

0,25 $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y \leq x^2$ نفيها:

3) إعطاء نفي كل من القضيتين المنطقيتين التاليتين :

نعلم أن : $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$

اذن :

a) $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q}) \Rightarrow P$

نفيها : $\left[(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q})\right] \wedge \overline{P}$ (0,25)

b) $P \Rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q})$

نفيها : $P \wedge \overline{\left[(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \vee (P \vee \overline{Q})\right]}$

أي : $P \wedge \left[\overline{(P \wedge Q)} \wedge \overline{(P \vee Q)} \wedge \overline{(P \vee \overline{Q})}\right]$ (0,75)

ومنه : $P \wedge \left[(\overline{P} \vee \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \wedge Q) \wedge (\overline{P} \wedge \overline{Q})\right]$

تمرين 02:

باستعمال البرهان بالعكس النقيض نبرهن أن :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \neq y \overset{??}{\Rightarrow} \frac{x+1}{y+1} \neq \frac{x-1}{y-1}$

نعلم أن : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ البرهان بالعكس النقيض

$\frac{x+1}{y+1} \neq \frac{x-1}{y-1} \overset{??}{\Rightarrow} x \neq y$

$\frac{x+1}{y+1} = \frac{x-1}{y-1} \overset{??}{\Rightarrow} x = y$ (1,5)

لدينا : $\frac{x+1}{y+1} = \frac{x-1}{y-1}$

$\Rightarrow (x+1)(y-1) = (y+1)(x-1)$

$\Rightarrow xy - x + y - 1 = yx - y + x - 1$

$\Rightarrow -2x + 2y = 0$.

$\Rightarrow 2x = 2y$.

$\Rightarrow x = y$

ومنه : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \frac{x+1}{y+1} = \frac{x-1}{y-1} \Rightarrow x = y$

وبالتالي : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \neq y \Rightarrow \frac{x+1}{y+1} \neq \frac{x-1}{y-1}$