République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Cours D'analyse

Première Année Licence Sciences Technologiques

Présenté par :

Dr. Sayah Abdallah

2021/2022

Sommaire

Fonctions réelles d'une variable réelle

Limite d'une fonction

Fonctions dérivables

Les intégrales

Fonctions réelles d'une variable réelle

Nous commençons ce chapitre par donner quelques définitions de base sur les fonctions.

Définition d'une application

Soit $f : E \longrightarrow F$. L'application f est une relation de E vers F dans laquelle chaque élément de E appelé ensemble de départ possède une image et une seule dans l'ensemble F.qui est appelé ensemble d'arrivé.

Définition d'une fonction reélle

Une fonction réelle d'une variable réelle est une application d'un sous ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ appelé domaine de définition de f à valeur dans un sous-ensemble $F \subseteq \mathbb{R}$ qui associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément y de F noté $f(x)$ et on dit que y est l' image de x par f et x est alors un antécédent de y par f.

On note

$$\begin{cases} f: & E \longrightarrow F \\ & x \longrightarrow y = f(x) \end{cases}$$

Domaine de définition

Définition:

L'ensemble de définition d'une fonction f ou domaine de définition noté D_f est l'ensemble des éléments de E qui ont une seule image dans F par la fonction f .

On note $D_f = \{x \in E, \text{ tel que } f(x) \text{ existe}\}$.

Domaine de définition de quelques fonctions:

1) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, alors $D_f = D_g \cap \{D_h \setminus \{x : \ h(x) = 0\}\}$

Exemple 01:

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \cap \left\{\mathbb{R} \diagdown \left\{x : \ x^2 - 1 \neq 0\right\}\right\} = \mathbb{R} \diagdown \{1, -1\}$.

2) $f(x) = (g(x))^{\dfrac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$

On a deux cas

a) Si k est pair alors $D_f = D_g \cap \{x : \ g(x) \geq 0\}$.

Exemple 02:

$f(x) = \left(1 - x^2\right)^{\dfrac{1}{4}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \cap \left\{x : \ 1 - x^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1]$.

b) Si k est impair alors $D_f = D_g$.

Exemple 03:

$f(x) = \left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{\dfrac{1}{5}} = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \diagdown \{2\}$.

3) $f(x) = (g(x))^{\dfrac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{Z}_-^*$

a) Si k est pair alors $D_f = D_g \cap \{x : \ g(x) > 0\}$.

b) Si k est impair alors $D_f = D_g \setminus \{x : \ g(x) = 0\}$.

Exemple 04:

$f(x) = (x+3)^{\frac{-1}{5}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$. 4) $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$.

Exemple 05:

$f(x) = e^{\frac{2}{x-1}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. 5) $f(x) = \ln g(x) \Rightarrow D_f = D_g \cap \{x : \ g(x) > 0\}$

Exemple 06:

$f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\} \cap \left\{x : \dfrac{x-1}{x+2} > 0\right\} =]-\infty, -2[\cup]1, \infty[$.

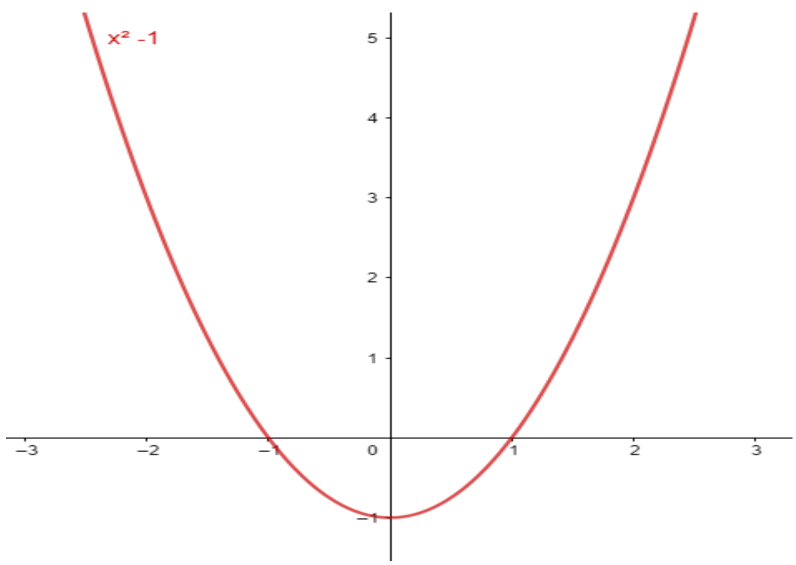
Graphe d'une fonction

Définition:

Si f est une fonction reélle d'une variable réelle, le graphe ou courbe représentative de f, noté Γ_f est défini par: $\Gamma_f = \left\{(x, \ f(x)) : \ x \in D_f\right\}$.

Exemple:

$f(x) = x^2 - 1$



Fonctions majorées, minorées, bornées:

Fonction majorée

Définition:

Soit f une application définie sur un intervalle $I \subseteq D_f$, alors la fonction f est dite majorée sur I, s'il existe un réel α tel que pour tout $x \in I$: on a

$$f(x) \leq \alpha.$$

Exemple:

La fonction sin est majorée sur $\mathbb{R}$, car on a $\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \sin x \leq 1$.

Fonction minorée

Définition:
La fonction f est dite minorée sur $I \subseteq D_f$, s'il existe un réel β tel que pour tout $x \in I$: on a

$$f(x) \geq \beta.$$

Exemple:
La fonction racine carré est minorée sur $\mathbb{R}_+$, car on a $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \geq 0.$

Fonction bornée

Définition:
La fonction f est dite bornée sur $I \subseteq D_f$, si elle est majorée et minorée sur I.
Autrement dit qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I$ on a:

$$|f(x)| \leq M$$

Exemple:
La fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$, car on a $\forall\, x \in \mathbb{R} : |\cos x| \leq 1.$

Fonction majorée et minorée par une fonction

Définition:
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I alors on dit que
1) La fonction f est majorée par la fonction g si pour tout x de I : on a

$$f(x) \leq g(x)$$

2) La fonction f est minorée par la fonction g si pour tout x de I : on a

$$f(x) \geq g(x)$$

Parité d'une fonction

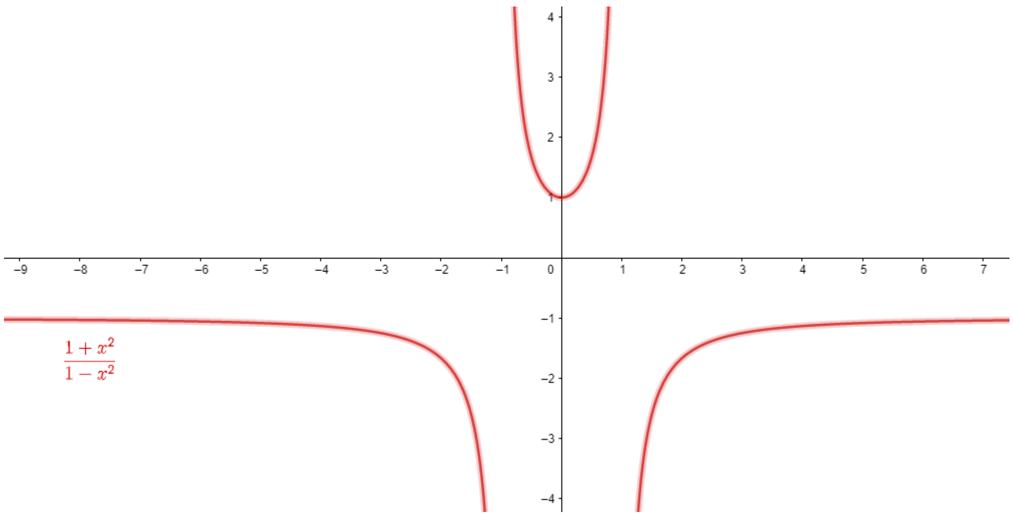
On étudie la parité d'une fonction sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ sauf si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.

Fonction paire

Définition:
Une fonction f dont son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 est dite paire si $\forall x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(x) = f(-x).$$

Propriété:
Dans un repère orthogonale , la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Exemple:
Etudier la parité de la fonction $f(x)$ telle que $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$
On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est symétrique par rapport à 0, donc on peut étudier la parité de cette fonction
Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors $f(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = f(x)$, la fonction f est paire.

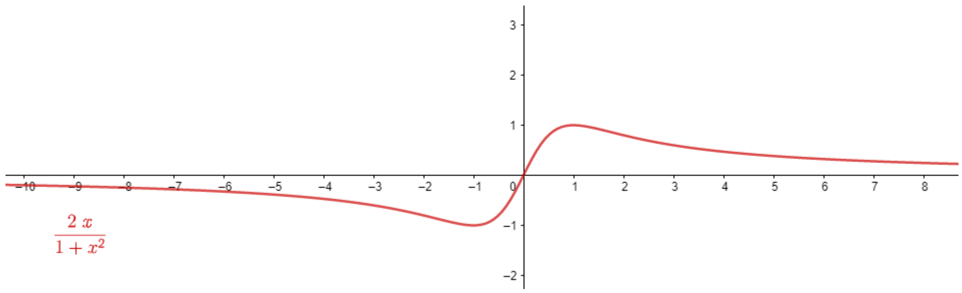


Fonction impaire

Définition:
Une fonction f dont son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 est dite impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(x) = -f(-x).$$

Propriété:
Dans un repère orthogonale , la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère O.
Exemple:
Etudier la parité de la fonction $f(x)$ telle que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors $f(-x) = \dfrac{-2x}{1+(-x)^2} = \dfrac{-2x}{1+x^2} = -f(x)$.
Pour tout réél x, on a $f(-x) = -f(x)$, d'où la fonction f est impaire.



Fonctions monotones

Définitions:
Soient I un intervalle tel que $I \sqsubseteq D_f$ et f une fonction à valeurs réelles, alors on dit que f est:
1) Croissante sur I si $\forall x, y \in I$ on a:

$$\text{si } x \leq y \text{ alors } f(x) \leq f(y)$$

2) Décroissante sur I si $\forall x, y \in I$ on a:

$$\text{si } x \leq y \text{ alors } f(x) \geq f(y)$$

3) Monotone sur I si elle est croissante où décoroissante
4) Strictement croissante sur I si $\forall x, y \in I$ on a:

$$\text{si } x < y \text{ alors } f(x) < f(y)$$

5) Strictement décoroissante sur I si $\forall x, y \in I$ on a:

$$\text{si } x < y \text{ alors } f(x) > f(y)$$

6) Strictement monotone sur I si elle est strictement croissante où strictement décoroissante.
Exemples:
1) La fonction f définie par:

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^3 \end{aligned}$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction f définie par:

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow exp(-x) \end{aligned}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction f définie par:

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow |x| \end{aligned}$$

est ni croissante ni décroissate sur $\mathbb{R}$.
Par contre la fonction f définie par:

$$\begin{aligned} f \ & \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow |x| \end{aligned}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Propriétés des fonctions monotones

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I alors:
1) Si f et g sont croissantes (décroissantes) sur I alors la somme $f+g$ est croissante (décroissante)
2) Si f est croissante sur I alors: αf est croissante pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et décroissante pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$.
3) Si f et g sont croissantes sur I alors le produit fg est croissant sur I.

Fonctions périodiques

Une fonction périodique est une fonction qui prend la même valeur si on ajoute à une variable x une certaine quantité fixe appelée période.
Définition:
Une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathcal{D}_f$ on a:

$$x+T \in \mathcal{D}_f$$

et

$$f(x+T) = f(x).$$

T est appelée période fondamentale.
Propriété:
Si T est la période fondamentale de la fonction f alors $kT,\ k \in \mathbb{Z}^*$ est aussi une période.
Exemple:
Les fontions $f(x) = \sin 2x,\ g(x) = \cos \dfrac{3\pi}{2}x$, sont des fontions périodiques de période fondamentale $T = \pi,\ T = \dfrac{4}{3}$.

Composition de fonctions

Définition:
Soient E, F et G, et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions. Alors la composée de f et g notée $g \circ f$ (g rond f) de E vers G définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pour tout } x \in E.$$

On obtient ainsi une nouvelle fonction $g \circ f : E \longrightarrow G$.
Propriétés
1) Si f et g sont croissantes, ou décroissantes toutes les deux alors leur composée (si elle existe) est croissante.
2) Si la fonction f est croissante et g est décroissante ou reciproquement alors la composée est décroissante.

Domaine de définition de la composée de deux fonctions

Soient $f : D_f \longrightarrow F$ et $g : D_g \longrightarrow G$, alors le domaine de définition des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définis respectivement par:

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$$

et

$$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$$

Exemple:
Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = x^2 - 3$
1) Trouver D_f et D_g.
2) Trouver $f \circ g$ et $g \circ f$
3) Trouver $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$.
Solution
1) On a: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$
2) De plus on a:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(g(x)) \\ &= \frac{1}{g(x) - 1} \\ &= \frac{1}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= \left(\frac{1}{x-1}\right)^2-3\\ &= -\frac{1}{(x-1)^2}\left(3x^2-6x+2\right)\end{aligned}$$

3) Soit $x\in D_{f\circ g}$

$$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ g(x)\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x^2-3\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x^2\neq 4$$

donc

$$D_{f\circ g}=\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}$$

Soit $x\in D_{g\circ f}$

$$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}\\ f(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}\\ \dfrac{1}{x-1}\in\mathbb{R}\end{cases}$$

donc

$$D_{g\circ f}=\mathbb{R}\diagdown\{1\}.$$

Fonction injective, surjective et bijective

Considérons une fonction f définie par $f:E\longrightarrow F$. On rappelle alors que E et F représentent l'ensemble de départ et d'arrivée respectivement.

Définition:

L'ensemble image de $A\subseteq E$ par f noté $f(A)$ est le sous ensemble de F défini par:

$$f(A)=\{y=f(x):\ x\in A\}$$

Définition:

L'image réciproque de $B\subseteq F$ par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B)=\{x\in E.:\ f(x)\in B\}$$

Fonction injective

Définition:

Une fonction $f:E\longrightarrow F.$ est dite injective si et seulement si tout élément y de $f(E)$ admet au plus un antécédent dans l'ensemble de départ E

Autrement dit:

$$\forall x_1,x_2\in E,\quad \text{si } f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

où

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ \text{si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemples:

1) On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{array}{c} f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{array}.$$

Est- ce que la fonction f est injective?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$, donc f n'est pas injective.

2) Même question que l'exemple précédent pour la fonction $f(x) = \begin{array}{c} f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to exp(2x) \end{array}$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow exp(2x_1 - 2x_2) = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, donc f est une fonction injective.

Fonction surjective

Définition:

f est dite surjective si tout élément $y \in F$ admet au moins un antécédent x dans l'ensemble de départ.E

Autrement dit $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple:

On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{array}{c} f: \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x} \end{array}$$

Est- ce que la fonction f est surjective?

f n'est pas sujective car l'élément $y = -1 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent.

Fonction bijective

Définition:

f est bijective si elle injective et surjective.

Autrement dit pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Autre écriture $\forall y \in F\ \exists x! \in E$ tel que $y = f(x)$.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une fonction.

Si f est bijective alors il existe une fonction bijective unique notée $f^{-1} : F \to E$ vérifiant:

1)

$$f^{-1} \circ f = id_E \ (\forall x \in E \quad id_E(x) = x).$$

2)
$$f \circ f^{-1} = id_F \ (\forall y \in E \quad id_F (y) = y.$$

La fonction f^{-1}est appelée la fonction réciproque où fonction inverse de f.
Exemple:
Soit la fonction f définie par

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \ln x, \end{gathered}$$

la fonction f est bijective, donc on peut définir sa fonction réciproque par

$$\begin{gathered} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ f^{-1}(y) = exp(y). \end{gathered}$$

On a:
$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = exp(\ln x) = x \in \mathbb{R}_+^*,$$

et

$$f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = \ln(exp(y)) = y \in \mathbb{R}.$$

Propriétés:
1) La composée de deux fonctions injectives est injective.
2) La composée de deux fonctions surjectives est surjective.
3) La composée de deux fonctions bijectives est bijective. En particulier, si f et g sont bijectives alors la fonction réciproque est donnée par

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Limite d'une fonction

Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.
Définition:
Soit $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f admet une limite finie en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta\,(\epsilon)\ \text{ tel que pour tout } x \in I,\ \text{ si } |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f\,(x) - l| \leq \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f\,(x) = l$
De cette définition on peut conclure que $f(x)$ est aussi près de l quand x suffisamment près de x_0.
Remarque :
Si $x_0 \in D_f$ et si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, alors $l = f(x_0)$.
Exemple:
En utilisant la définition montrer que $\lim\limits_{x \to 2} x - 3 = -1$
Soit $\epsilon \geq 0$. tel que $|(x-3)+1| \leq \epsilon$
$|(x-3)+1| = |x-2| \leq \epsilon$, alors si on prend $\epsilon = \delta$, alors pour tout x vérifiant $|x-2| \leq \delta \Rightarrow |(x-3)+1| \leq \epsilon$.

Limite finie à droite, limite à gauche

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.
Définition:
Soit $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f admet une limite finie à droite en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta\,(\epsilon)\ \text{ tel que pour tout } x,\ \text{ si } 0 \leq x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f\,(x) - l| \leq \epsilon,$$

et on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f\,(x) = l$ où $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} f\,(x) = l$,
cette définition signifie que lorsque x s'approche à droite de x_0 avec $(x \geq x_0)$,
$f(x)$ devient très proche de l.
Définition:
Soit $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f admet une limite finie à gauche en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta\,(\epsilon)\ \text{ tel que pour tout } x,\ \text{ si } 0 \leq x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f\,(x) - l| \leq \epsilon,$$

et on note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f\,(x) = l$ où $\lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} f\,(x) = l$.
Cette définition signifie que lorsque x s'approche à gauche de x_0 avec $(x \leq x_0)$, $f(x)$ devient très proche de l.
Exemple:
Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$
$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=-2.$

Théorème:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l.$

Remarque:

On dit que la fonction f n'a pas de limite quand $x\longrightarrow x_0$ si

1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$

2) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ existent et sont différentes, comme l'exemple précédent.

3) $f(x)$ a plus d'une limite quand $x\longrightarrow x_0$ par exemple la fonction $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ a une infinité de limites quand $x\longrightarrow0$.

Limite en $+\infty$

Définition:

Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I=[a,+\infty[\subset\mathbb{R}$
Soit $l\in\mathbb{R}$, alors on dit que f a pour limite l lorsque $x\longrightarrow+\infty$ si

$$\forall\epsilon>0\ \exists M(\epsilon)>0 \text{ tel que pour tout } x>M\Rightarrow|f(x)-l|\leq\epsilon$$

et on notera

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l.$$

Cette définition affirme que lorsque x devient très grand (tend vers $+\infty$, $f(x)$ devient très proche de l.

Limite en $-\infty$

Définition:

Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I=]-\infty,a]\subset\mathbb{R}$
Soit $l\in\mathbb{R}$, alors on que f a pour limite l lorsque $x\longrightarrow-\infty$ si

$$\forall\epsilon>0\ \exists M(\epsilon)>0 \text{ tel que pour tout } x<M\Rightarrow|f(x)-l|\leq\epsilon$$

et on notera

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=l.$$

Limite infinie

Définition:
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I
Soit $x_0 \in I$, alors ondit que f tend vers $+\infty$ quand $x \longrightarrow x_0$ si
$\forall A > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout x, $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$, et on notera $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Définition:
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I = [a, +\infty[\subset \mathbb{R}$
On dit que f tend vers $+\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$ si

$$\forall A > 0\ \exists M(A) > 0 \text{ tel que pour tout } x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A$$

et on notera

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Propriétés des limites
1) La limite d'une fonction, si elle existe, elle est unique.
2) Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = x_0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = l$.
3) Soient deux fonctions f et g.
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l'$. où $x_0 \in \mathbb{R}$ où $x_0 = \pm\infty$. Alors
a) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha l$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
b) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$.
c) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) g(x)) = l \times l'$.
d) Si $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{l}$ et de plus si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x)) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = 0$.
e) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$ et la fonction $g(x)$ est bornée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f(x) g(x)) = 0$.
4)
a) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage d'un point x_0 et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors $l \leq l'$.
b) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage d'un point x_0 et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \infty$.
c) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage d'un point x_0 et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l$.
Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty$,
alors on ne peut rien dire sur la limite de $f + g$ car on est dans un cas d'une forme indéterminée.$\infty - \infty$.
Voici une liste de formes indéterminées: $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 1^∞, $\dfrac{0}{0}$, ∞^0, 0^0.

Limites de quelques fonctions

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\sin\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\tan\varphi(x)}=1$ si $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$

Exemple 01:

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{4x\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4},\text{ car on a: }\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=2,\text{car }\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$ si $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$

Exemple 02:

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2$$

puisque $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=e^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

Exemple 03:

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}$$

$$=\frac{5}{4}.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}$$

On a: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, donc si on prend $a=\sqrt[3]{x^2-1}$, et $b=2$, alors

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2-1}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4\right)}{(x-3)\left(\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-9\right)}{(x-3)\left(\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{\left(\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2-1}+4\right)}=\frac{6}{12}.$$

Fonctions continues.

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$, non vide et soit $x_0\in I$. Alors on dit que la fonction f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Si f n'est pas continue en x_0 on dit que f est discontinue en x_0 et x_0 s'appelle un point de discontinuité de f.

Définition:

On dit que la fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

Propriétés:

Soient f et g deux fonctions continues sur $I\subseteq\mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes :

1) $f\pm g$ est continue sur I.

2) pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction αf est continue sur I.

3) Si $g(x)\neq 0\ \forall x\in I$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I..

Continuité à droite et à gauche

Définition:

Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0, alors

1) La fonction f est dite continue à droite de x_0 si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

2) La fonction f est dite continue à gauche de x_0 si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

Théorème:
Une fonction f définie dans un voisinage de x_0 est continue en x_0 si et seulement si elle continue à droite et à gauche de x_0.

Exemple 01:
Soit la fonction f définie par:
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$
On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^2+1} = 1 = f(0)$, donc f est continue à droite de $x_0 = 0$, et on a $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1 = f(0)$, donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$, d'où la fonction f est continue au point $x_0 = 0$.

Exemple 02:
Soit la fonction f définie par:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$
On a $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \neq f(1) = -1$, donc f n'est pas continue à droite de $x_0 = 1$, et on a
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 2\right) = -1 = f(1)$, donc f est continue à gauche de $x_0 = 1$, d'où la fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 1$.

Prolongement par continuité

Définition:
On dit que x_0 est un point intérieur de l'intervalle I s'il existent $a, b \in I$ tel que $x_0 \in]a, b[$.
Soit f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$ où x_0 est un point intérieur de l'intervalle I.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors on peut prolonger f par continuité sur I et le prolongement est défini par:
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Théorème des valeurs intérmédiaires

Théorème:
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème:
Soit f une fonction définie sur I, et soit l'intervalle $[a, b] \subset I$, si $m \in]f(a), f(b)[$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $m = f(c)$.
Autrement dit tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par la fonction f.

Monotonie et injectivité

Théorème:
Soit f une fonction définie sur un intervalle sur I et strictement monotone. Alors f est injective. La réciproque est fausse.

Continuité et bijectivité

Théorème:
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to f(I)$. Si f est injective et continue sur I, alors f est bijective.

Fonctions dérivables

Dérivée en un point

Définition:
On dit que q'une fonction f définie dans un voisinage de x_0 est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe dans $\mathbb{R}$ et on la note $f'(x_0)$, et elle est appelée dérivée de f en x_0.
Exemples:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes en x_0
1) $f(x)=x^2$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=2x_0.$$

2) $f(x)=\ln x$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\ln\left(\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)^{\frac{1}{x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x_0}\ln\left(\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)=\frac{1}{x_0}$$

car $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)=e.$

3) $f(x)=\sin x$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{2\frac{x-x_0}{2}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}=1$, alors $f'(x_0)=\cos(x_0)$.

Dérivée à droite et à gauche

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$. Soit $x_0\in I$.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe dans $\mathbb{R}$ et on la note $f_d^{'}(x_0)$.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe dans $\mathbb{R}$ et on la note $f_g^{'}(x_0)$.
Théorème:
f est dérivable en x_0 si et seulement si $f_d^{'}(x_0)=f_g^{'}(x_0)$.
Exemple:
Soit f une fonction définie par $f(x)=|x|$
Est -ce que f est dérivable en $x_0=0$.
On a $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x\leq 0\end{cases}$
$f_d^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1,$
et $f_g^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$
On a $f_d^{'}(0)\neq f_g^{'}(0)$, donc f n'est pas dérivable en $x_0=0$.
Remarque
La fonction f est dérivable en x_0 s'il existe une fonction

$$\begin{aligned} \epsilon \quad & I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R} \\ & x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f^{'}(x_0)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0^-}\epsilon(x)=0$
On peut écrire aussi que

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f^{'}(x_0)+(x-x_0)\epsilon(x)$$

Définition:
On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement
si f est dérivable en tout point de I, donc on peut définir sur I la fonction
$f^{'}$ par

$$\begin{aligned} f^{'} &: I\to\mathbb{R} \\ x &\to f^{'}(x)\end{aligned}$$

et la fonction $f^{'}$ s'appelle la fonction dérivée.
Théorème:
1) Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.
2) Toute fonction dérivable sur I est continue en I

Opérations sur les dérivées

Théorème:
Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, alors
1) Les fonctions $f+g,\ \alpha f$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*,\ f.g$ sont dérivables sur l'intervalle I et on a:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x)\\ (\alpha f)'(x) &= \alpha f'(x)\\ (f.g)'(x) &= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)\end{aligned}$$

et si $g(x) \neq 0\ \forall x \in I$, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dérivée et monotonie

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$, alors
1) $f = c$ (constante)$\Longleftrightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in I$.
2) f est croissante sur $I \Longleftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
3) f est décroissante sur $I \Longleftrightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.
4) f est stictement croissante sur $I \Longleftrightarrow f'(x) > 0\ \forall x \in I$.
5) f est strictement décroissante sur $I \Longleftrightarrow f'(x) < 0\ \forall x \in I$.

Dérivées de quelques fonctions usuelles

1) $f(x) = (g(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors

$$f'(x) = \alpha\,(g(x))^{\alpha-1}\,g'(x).$$

2) $f(x) = e^{g(x)}$ alors

$$f'(x) = g'(x)\,e^{g(x)}.$$

3) $f(x) = \ln g(x)$ alors

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

4) $f(x) = \sin g(x)$ alors

$$f'(x) = g'(x)\cos(g(x)).$$

5) $f(x) = \cos g(x)$ alors

$$f'(x) = -g'(x)\sin(g(x)).$$

6) $f(x) = a^{g(x)}$ $a > 0$ et $a \neq 1$ alors

$$f'(x) = g'(x)\,a^{g(x)}\ln a$$

Exemples:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes
1) $f(x) = x^2(x^3+1)$,
$f'(x) = 2x((x^3+1)) + x^2(3x^2) = 5x^4 + 2x.$
2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{(x^2-2x-1)}{(x-1)^2}.$
3) $f(x) = (x^2+3x-4)^3$
$f'(x) = 3(x^2+3x-4)^2(2x+3)$.
4) $f(x) = (x^3+2x^2)^{1/3}$
$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3+2x^2)^{-2/3}(3x^2+4x)$.
5) $f(x) = e^{-3x^2}$
$f'(x) = -6xe^{-3x^2}.$
6) $f(x) = \ln(x^2-3x)$
$f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}.$

Dérivée d'une fonction composée

Théorème:
Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et $f(I)$ respectivement alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et on a:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) \;\; \forall x \in I.$$

Exemple:
Calculer la dérivée de la fonction suivante
$h(x) = 3\sin(x^2+1)$
Prenons $g(x) = 3\sin x$ et $f(x) = x^2+1$, alors $h'(x) = 2x(3\cos(x^2+1)) = 6x\cos(x^2+1)$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème:
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction continue et bijective, alors
Si f est dérivable sur E et $f'(x) \neq 0 \; \forall x \in E$, alors la fonction réciproque
f^{-1} est dérivable sur F et on a: $\forall y \in F$:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{f'(x)}\end{aligned}$$

Exemple:
Calculer la dérivée de la fonction suivante: $h(x) = \ln x$
On sait que la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to e^x \end{aligned}$$

est une fonction bijective de fonction inverse g^{-1} qui est définie par

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ y &\to \ln y \end{aligned}$$

On a $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$ donc
$\left(g^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{g'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^{\ln y}} = \dfrac{1}{y}$, d'où $h'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Dérivées d'ordre supérieurs

Fonction dérivable plusieurs fois

Définition
Soit f une fonction définie et dérivable sur I alors on dit f est deux fois dérivable sur I si la fonction f' est dérivable sur I et on la note par f''
En général on dit f est n fois dérivable sur I si la dérivée $n^{ième}$ est définie sur I, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et on note cette dérivée par $f^{(n)}$, et on dit que f est indéfiniment dérivable si $\forall n \in \mathbb{N}^*$la dérivée n^{ième} de f existe.
On dit que $f \in \mathcal{C}^0(I)$, si f est continue sur I.
Exemple:
La fonction $f(x) = exp(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Définition
On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ou apppartient à $\mathcal{C}^n(I)$ si la dérivée n^{ième} $\left(f^{(n)}\right)$ est continue sur I, et on dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est continue sur I .
Exemple:
La fonction $f(x) = \sin x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Formule de Leibniz

Théorème:
Soient f et g deux fonctions n fois dérivable sur I,alors

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)}g^{(2)} + ... + fg^{(n)}$$

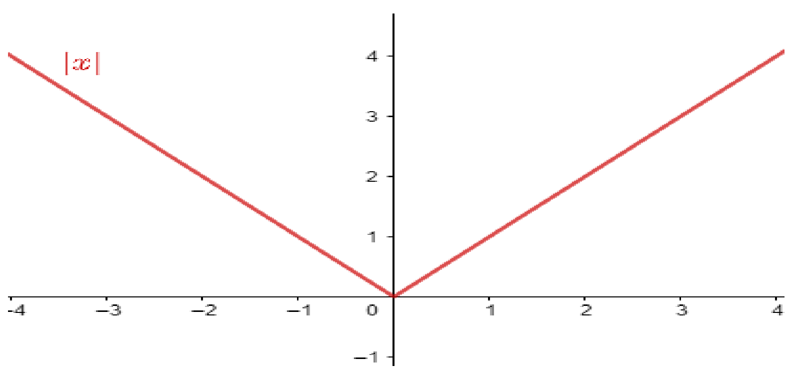
Autrement dit :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $f^{(k)}$ est la $k^{ième}$ dérivée de f et $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

Extrémum d'une fonction

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $x_0 \in I$. alors on dit que:
1) La fonction f admet un maximum en x_0 si $\forall x \in I$ on a: $f(x) \leq f(x_0)$.
2) La fonction f admet un minimum en x_0 si $\forall x \in I$ on a: $f(x) \geq f(x_0)$.
3) La fonction f admet un extrémum en x_0 si f admet un maximum ou un minimum en x_0.
Théorème:
Si f admet un extrémum en $x_0 \in I$ et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
Remarques:
1) La réciproque de ce théorème est fausse.
2) La dérivabilité de f en x_0 n'est pas une condition nécéssaire pour l'existence de l'extrémum de f en x_0.
Exemple:
Soit la fonction f définie par $f(x) = |x|$. On a vu précédement que f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.
On remarque que f admet un minimum en $x_0 = 0$ malgrés qu'elle n'est pas dérivable en ce point.



Façons de trouver les extrémums

Soit $f(x)$ une fonction, on cherche les extrémums de $f(x)$
1) On calcule $f'(x)$, et puis on cherche les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Supposons que x_0 est une solution de l'équation $f^{'}(x) = 0$
2) On cherche les signes de $f^{'}(x)$ au voisinage de x_0
Si $f^{'}(x) < 0$ à droite de x_0 et $f^{'}(x) > 0$ à gauche de x_0 alors
f admet un maximum au point x_0 .
Si $f^{'}(x) > 0$ à droite de x_0 et $f^{'}(x) < 0$ à gauche de x_0 alors
f admet un minimum au point x_0 .
3) Si on ne peut pas savoir le signe de $f^{'}(x)$ à droite et à gauche de x_0 , on calcule $f^{''}(x_0)$.
Si $f^{''}(x_0) < 0$ alors f admet un maximum au point x_0 , et si $f^{''}(x_0) > 0$ alors f admet un minimum au point x_0 ,
et si $f^{''}(x_0) = 0$, on calcule $f^{(3)}(x_0)$.
Si $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, alors le point x_0 est un point d'inflexion de f

En général

Si $f^{'}(x) = f^{''}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = ... = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$, et $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$ alors:
Si $f^{(2k)}(x_0) < 0$ alors f admet un maximum au point x_0 , et si $f^{(2k)}(x_0) > 0$ alors f admet un minimum au point x_0.
Si $f^{'}(x) = f^{''}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = ... = f^{(2k)}(x_0) = 0$, et si $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, alors: le point x_0 est un point d'inflexion de f.
Ou f est continue en x_0 et $f^{'}_d(x_0)$ et $f^{'}_g(x_0)$, existent et de signe opposé.

Exemple:

Trouver les extrémums de la fonction $f(x) = x^4 + \dfrac{x}{2} + 5$

$f^{'}(x) = 4x^3 + \dfrac{1}{2}$

Cherchons les racines de l'équation $4x^3 + \dfrac{1}{2} = 0$

$4x^3 + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$

Supposons qu'on ne peut pas savoir le signe de $f^{'}(x)$ à droite et à gauche de$x_0 = \dfrac{-1}{2}$.

On calcule $f^{''}(x_0)$

$f^{''}(x) = 12x^2$donc $f^{''}\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 3 > 0$ alors f admet un minimum au point
$x_0 = -1/2$.

Théorèmes fondamentaux sur les dérivées

Théorème de Role:

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe

$c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Exemples:

1) Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, on a : $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

Soit la fonction $f(t) = \ln(1+t)$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction f est continue $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0} = \frac{1}{1+c}$$

On a $0 < c < x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}. < \dfrac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1$

$\forall x \in]0, +\infty[$, de plus pour $x = 0$, on a $\dfrac{0}{0+1} \leq \ln(0+1) \leq 0$, d'où le résultat.

2) Montrer que $\frac{1}{3} < \ln 1.5 < \frac{1}{2}$

Soit la fonction $f(t) = \ln t$.

La fonction f est continue $[2, 3]$, dérivable sur $]2, 3[$, donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]2, 3[$ tel que $\dfrac{\ln 3 - \ln 2}{3 - 2} = \dfrac{1}{c}$.

On a $2 < c < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \ln 1.5 < \dfrac{1}{2}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

Soit la fonction $f =$ définie par $f(t) = \sqrt{t}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a la fonction f est continue $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x + 1 - x} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

On a

$$x < c < x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$$

donc

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$,
alors par passage à la limite on trouve que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0.$$

Règle de l'Hospital

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et soit $x_0 \in I$, tel que
$f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et égale à l alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et égale à l alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
De plus si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et égale à l alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Remarque
Si

$$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0) = 0, \; g^{(n)}(x) \neq 0 \; \forall x \in I \setminus \{x_0\} .$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \text{ existe et égale à } l \text{ alors } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemples:
Calculer les limites suivantes
1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2-1}$.
1) Posons $f(x) = \sqrt{x+1}$, et $g(x) = x - 1$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $g'(x) = 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g'(x) = 1$,

donc d'après la règle de l'Hospital $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = 0$.
2) Posons $f(x) = \ln(2x-1)$, et $g(x) = x^2 - 1$, alors $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ et
$g'(x) = 2x$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} g'(x) = 2$,
donc d'après la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x} = 1.$$

Les formes indéterminées:

Les formes indéterminées sont $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 0^0, 1^∞.
On utilise la règle de l'Hospital dans le cas des deux formes indéterminées $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, mais on peut utiliser la règle de l'Hospital dans les autres cas

par exemple

1) Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (même $x_0=\pm\infty$)
alors on peut écrire $f(x)-g(x)$ de la manière suivante:

$f(x)-g(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\dfrac{1}{f(x)\,g(x)}}$ (une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$).

2) Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (même $x_0=\pm\infty$)
alors on peut écrire $f(x)\,g(x)$ de la manière suivante:

$f(x)\,g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ (une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$) ou

$f(x)\,g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ (une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$)

3) Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (même $x_0=\pm\infty$)
alors on peut écrire $f(x)^{g(x)}$ de la manière suivante:

$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=exp\ \dfrac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ (une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$)

4) Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ (même $x_0=\pm\infty$)
alors on peut écrire $f(x)^{g(x)}$ de la manière suivante:

$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=exp\ \dfrac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ (une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$).

Formules de Taylor

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n([a,b])$, et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c\in\,]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(b)$$

où

$$R_n(b)=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

qui s'appelle le reste de Lagrange, et $n!=n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1$
Cette formule s'appelle formule ou developpement de Taylor-Lagrange d'ordre n au voisinage de a

Remarque:
Si on remplace dans la formule de Taylor b par $a+x$ et c par $a+\theta x$ où $0<\theta<1$ on obtient

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x).$$

Formule de Taylor-Young

Théorème: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I)$ alors pour tout $a,x\in I$ on a

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)$$

où

$$R_n(x)=(x-a)^n\epsilon(x)\ \text{avec}\lim_{x\to a}\epsilon(x)=0$$

s'appelle le reste de Young.
Cette formule s'appelle formule ou developpement de Taylor-Young d'ordre n au voisinage de a

Formule de Mac-Laurin

Si on prend dans les formules précédentes $a=0$ on obtient la formule de Mac-Laurin

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n\epsilon(x),\ \text{avec}\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0.$$

Comparaison de fonctions

Définitions:
Soient f et g deux fonctions définies sur I et soit $x_0\in I$, tel que
$g(x)\neq 0\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}$, alors
1) On dit que la fonction f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ et on note $f=o(g)$ au voisinage de x_0,
2) On dit que la fonction f est dominée par g au voisinage de x_0 si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0, et on note $f=O(g)$ au voisinage de x_0.
Remarque:
Les développements précédents peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+o\left((x-a)^n\right).$$

ou

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n).$$

Exemple de développement de Mac- Laurin de quelques fonctions usuelles

1) $exp\left(x\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right),$
l'ordre du développement est n.
2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
l'ordre du développement est $2n+1$.
3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{\left(2n\right)!}+o\left(x^{2n}\right).$
l'ordre du développement est $2n$.
4) $\left(1+x\right)^a=1+ax+\frac{a\left(a-1\right)}{2!}x^2+\frac{a\left(a-1\right)\left(a-2\right)}{3!}x^3+...+\frac{a\left(a-1\right)\left(a-2\right)...\left(a-n+1\right)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),\quad a\in\mathbb{R}^*$
l'ordre du développement est n.
5) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+....+\left(-1\right)^n x^n+o\left(x^n\right).$
l'ordre du développement est n.
6) On a: $\int\frac{1}{1+x}dx=\ln\left(1+x\right)$, donc
$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+....+\frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{n}+o\left(x^{n+1}\right)$
l'ordre du développement est $n+1$.
7) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+....+x^n+o\left(x^n\right).$
l'ordre du développement est n.
$e^x=1+x+\frac{x^2}{!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$
8) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+....+\frac{\left(2n\right)!x^{2n}}{2^{2n}n!}+o\left(x^{2n}\right).$
9) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+....+\left(-1\right)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right).$

Exemples:

1.a) Ecrire le développement de Mac-Laurin à l'ordre $n=2$, pour la fonction $\sqrt[3]{1+x}$.

1.b) Utiliser le développement de Mac-Laurin à l'ordre $n=2$, pour approcher $\sqrt[3]{1.5}$.

Posons $f\left(x\right)=\sqrt[3]{1+x}$.

On a $f'\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(1+x\right)^{-\frac{2}{3}}$, $f''\left(x\right)=\frac{-2}{9}\left(1+x\right)^{-\frac{5}{3}}$, $f^{(3)}\left(x\right)=\frac{10}{27}\left(1+x\right)^{-\frac{8}{3}}$

donc $\exists c\in\left]0,x\right[$ tel que $f\left(x\right)=f\left(0\right)+xf'\left(0\right)+\frac{x^2}{2}f''\left(0\right)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}\left(c\right)$

$f\left(x\right)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5x^3}{81}x^3\left(1+c\right)^{-\frac{8}{3}}$

Pour $x=0.5$ on a $\sqrt[3]{1+0.5}\simeq1+\frac{1}{3}\times0.5-\frac{1}{9}\left(0.5\right)^2=1.1389.$

Calculons l'erreur commise

On a $1 < (1+c) < 1+x \Rightarrow 0 < \frac{5x^3}{81} x^3 (1+c)^{-\frac{8}{3}} < \frac{5}{81}(0.5)^3$.

Donc $\sqrt[3]{1.5} \simeq 1.1389$ avec une erreur $< \frac{5}{81}(0.5)^3 = 7.716 \times 10^{-3}$.

2) Ecrire les développements de Mac-Laurin à l'ordre indiqué entre parenthèse des fontions suivantes :

$f(x) = \tan x$ (3) , $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ (2) , $f(x) = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$ (3) ,

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développementde Mac-Laurin de $\cos x$ est 1,
et puisque l'ordre du développement demandé est 3
donc on fait un développement de Mac-Laurin de $\sin x$ à l'ordre $n = 3$

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$.

On divise le développement de Mac-Laurin (par ordre croissant des puissances de x) de la fonction $\sin x$ par le développement de Mac-Laurin de $\cos x$

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développement de Mac-Laurin de $e^x - 1$ est x, et puisque l'ordre du développement demandé est 2 donc on fait un développement de Mac-Laurin de e^x à l'ordre $n = 3$

On a $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

On divise le développement de Mac-Laurin de la fonction $e^x - 1$ par x

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + o(x^2).$$

$f(x) = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$

Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x) du développement de Mac-Laurin de $e^x - 1$ est x, et puisque l'ordre du développement demandé est 3 donc on fait un développement de Mac-Laurin de $\cos x - 1$ à l'ordre $n = 4$.

On divise le développement de Mac-Laurin (par ordre croissant des puissances de x) de la fonction $\cos x - 1$ par le développement de Mac-Laurin de $e^x - 1$

$$\frac{\cos x-1}{e^x-1}=\frac{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)}=-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

3) Trouver lorsque les limites des expressions suivantes, si elles existent :
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$
Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x)
du développement de Mac-Laurin de e^x-e^{-x} est $2x$, et puisque le premier terme (par ordre croissant des puissances de x)
du développement de Mac-Laurin de $\sin x$ est x donc on fait un développement
de Mac-Laurin de $\sin x$ à l'ordre $n=1$
Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x+o(x)}=2$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$
Comme le premier terme (par ordre croissant des puissances de x)
du développement de Mac-Laurin de $\cos x-1$ est $\frac{x^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2}$

Fonctions trigonométriques inverses

Fonction arcsinus

On sait que la fonction $f(x)=\sin x$ définie par

$$\begin{array}{rlll} f: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \to & \sin x \end{array}$$

est une fonction continue, bijective donc on peut définir sa fonction inverse par

$$\begin{array}{rlll} f^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \to & arc\sin x \end{array}$$

Remarques:
1) La fonction arcsin est une fonction strictement croissante bijective et impaire.
2) Si $f(x)=\arcsin g(x)$, alors $D_f=D_g\cap\{x:-1\le g(x)\le 1\}$, et $f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$.
3) On a $\sin(\arcsin x)=x$ $\forall x\in[-1,1]$ et $\arcsin(\sin x)=x$ $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
4) Developpement de Mac-Laurin de $\arcsin x$ est

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + ... + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{2^{2n}n!\,(2n+1)} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Fonction arccos

La fonction $f(x) = \cos x$ définie par

$$\begin{array}{rlll} f: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

est une fonction continue et strictement décroissante, donc elle est bijective et admet pour fonction inverse la fonction f^{-1}définie par

$$\begin{array}{rlll} f^{-1}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longrightarrow & \arccos x. \end{array}$$

Remarques

1) La fonction arccos est une fonction continue, strictement décroissante bijective et ni paire, ni impaire

2) Si $f(x) = \arccos g(x)$, alors $D_f = D_g \cap \{x : -1 \le g(x) \le 1\}$,et $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$.

3) On a $\cos(\arccos x) = x\ \forall x \in [-1,1]$ et $\arccos(\cos x) = x\ \forall x \in [0,\pi]$.

4) Developpement de Mac-Laurin de $\arccos x$ est

$$\arccos x = -x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - .... - \frac{(2n)!x^{2n+1}}{2^{2n}n!\,(2n+1)} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

5) Pour tout $x \in [-1,1]$ on a:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Fonction arctan

La fonction $f(x) = \tan x$ définie par

$$\begin{array}{rlll} f: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$

est une fonction continue et strictement croissante, donc elle est bijective et admet pour fonction inverse la fonction f^{-1}définie par

$$\begin{array}{rlll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longrightarrow & \arctan x. \end{array}$$

Remarques

1) La fonction arctan est une fonction continue, strictement décroissante bijective et impaire

2) Si $f(x) = \arctan(g(x))$, alors $D_f = D_g$, $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{1+g^2(x)}$.
3) On a $\tan(\arctan x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(\tan x) = x \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4) Developpement de Mac-Laurin de $\arctan x$ est

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, on a:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

Fonctions hyperboliques et ses inverses

Fonction cosinus hyperbolique et son inverse

La fonction cosinus hyperbolique notée ch est définie par

$$\begin{aligned} ch: \quad & [0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[\\ & x \longrightarrow chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

est une fonction bijective et admet pour fonction inverse la fonction définie par:

$$\begin{aligned} Argch: \quad & [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\\ & x \longrightarrow Argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}$$

Fonction sinus hyperbolique et son inverse

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie par

$$\begin{aligned} sh: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

est une fonction bijective continue strictement croissante et admet pour fonction inverse la fonction définie par:

$$\begin{aligned} Argsh: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow Argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

Propriétés
1) $ch^2x - sh^2x = 1$
2) $ch'x = shx$ et $sh'x = chx$.
3) $Argsh\varphi(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+\varphi^2(x)}}$, et $Argch\varphi(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}$.

Fonction tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est :

$$\begin{aligned} th: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \left]-1,1\right[\\ & x \longrightarrow thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^x}{e^x + e^x} \end{aligned}$$

est bijective et de fonction inverse définie par:

$$\begin{aligned} Argth: \quad & \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow Argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

On a de plus $(Argth\varphi(x))' = \dfrac{\varphi'(x)}{1-\varphi^2(x)}$.

Les intégrales

Intégrale définie

Définition

L'intégration définie est liée au problème du calcul d'une surface délimité par la courbe d'une fonction $f(x)$ et les droites perpendiculaires $x = a$ et

$x = b$ et l'axe des abscisses (ox), et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, et on dit que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème:

Toute fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable sur cet intervalle.

Théorème:

Toute fonction monotone sur l'intervalle $[a, b]$ est intégrable .

Propriétés de l'intégrale définie

Supposons que toutes ces intégrales existent, alors:

1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{.et} \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ où } c \in [a, b].$$

3)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

4)

$$\text{Si } f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

5)

$$\text{Si } f(x) \geq g(x) \; \forall x \in [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

6)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \geq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7)

$$\text{Si } m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b], \text{ alors } m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

8)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy.......$$

Primitive d'une fonction

Définition:
On appelle primitive d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ toute fonction φ définie et dérivable sur $[a,b]$ telle que $\varphi'(x) = f(x)$ et on écrit

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Relation fondamentale du calcul de l'intégrale définie:

Supposons qu'elle existe une autre fonction primitive $F(x)$ de la fonction
$f(x)$ alors

$$\varphi(x) = F(x) + c.$$

On a

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{ donc } c = -F(a) \text{ et } \varphi(x) = F(x) - F(a),$$

d'où pour $x = b$ on a

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Exemple:
La fonction $\sin x$ est la primitive de la fonction $\cos x$, et toutes les fonctions
$\sin x + c$ $(c \in \mathbb{R})$ sont des primitives de la fonction $\cos x$, et
$\int_a^b \cos t dt = \sin b - \sin a.$

Intégrale indéfinie

Définition:
La primitive d'une fonction $f(x)$ est la fonction $F(x)$ telle que
$F^{'}(x) = f(x)$, et cette primitive n'est pas unique
Exemple:
La fonction $x^2 + c$ est la primitive de la fonction $2x$ où c est une constante.
Si la fonction f est une fonction continue alors elle admet une infinité de primitives.
Définition:
On appelle la recherche d'une primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est l'intégration indéfinie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

où x est la variable de l'intégration.

Propriétés de l'intégrale indéfinie

1)
$$y = \int f(x)\,dx \Rightarrow dy = f(x)\,dx.$$
2)
$$\left(\int f(x)\,dx\right)^{'} = f(x)\,,\ \text{et } d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$
3)
$$\int f^{'}(x)\,dx = \int df(x) = f(x) + c,$$
où c est une constante.

Intégrales de fonctions élémentaires

1)
$$\int g^n(x)\,dg(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c,\ \text{où } n \in \mathbb{R},\ \text{et } n \neq -1$$
Exemple 01:
Calculer les intégrales suivantes:
$\int x\left(x^2+2\right)^3 dx$,
Posons $g(x) = \left(x^2+2\right) \Rightarrow dg(x) = g^{'}(x)\,dx = 2xdx$
donc $\int x\left(x^2+2\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int (g(x))^3\,dg(x) = \frac{1}{2}\frac{g^4(x)}{4} + c = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2\right)^4}{4} + c.$
$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$
Posons $g(x) = \ln x \Rightarrow dg(x) = g^{'}(x)\,dx = \frac{dx}{x}$
donc $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c.$

2)
$$\int \frac{dg\,(x)}{g\,(x)} = \ln|g\,(x)| + c.$$

Exemple 02:
Calculer les intégrales suivantes:
$\int \frac{dx}{4x+1}$
Posons $g\,(x) = 4x + 1 \Rightarrow dg\,(x) = g'\,(x)\,dx = 4dx$
donc $\int \frac{dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dg\,(x)}{g\,(x)} = \frac{1}{4}\ln|4x+1| + c.$
$\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 2}$
Posons $g\,(x) = \cos x + 2 \Rightarrow dg\,(x) = g'\,(x)\,dx = -\sin x dx$
donc $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 2} = -\ln|\cos x + 2| + c.$

3)
$$\int \cos\,(g\,(x))\,dg\,(x) = \sin g\,(x) + c.$$
et
$$\int \sin\,(g\,(x))\,dg\,(x) = -\cos g\,(x) + c.$$

Exemple 03:
Calculer les intégrales suivantes:
$\int \cos\,(5x+1)\,dx$
$\int \cos\,(5x+1)\,dx = \frac{1}{5}\sin\,(5x+1) + c.$
$\int x\sin\left(x^2+1\right)dx$
Posons $g\,(x) = \left(x^2+1\right) \Rightarrow dg\,(x) = g'\,(x)\,dx = 2xdx$
donc $\int x\sin\left(x^2+1\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right) + c.$

4)
$$\int \tan\,(g\,(x))\,dg\,(x) = -\ln|\cos\,(g\,(x))| + c.$$
et
$$\int \cot\,(g\,(x))\,dg\,(x) = \ln|\sin\,(g\,(x))| + c.$$

Exemple 04:
Calculer l'intégrale suivante:
$\int \frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{3\sqrt{x}}dx$
$\int \frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{3\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{3}\ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + c.$

5)

$$\int a^{g(x)} dg\,(x) = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + c, \text{tel que} a > 0 \text{ et } a \neq 1$$

Exemple 05:
Calculer les intégrales suivantes:
$\int a^{3x} dx$
$\int a^{3x} dx = \dfrac{a^{3x}}{3 \ln a} + c.$
$\int xe^{-x^2} dx$
Posons $g\,(x) = -x^2 \Rightarrow dg\,(x) = g'\,(x)\,dx = -2xdx$
donc $\int xe^{-x^2} dx = -\dfrac{-1}{2} e^{-x^2} + c.$

6)

$$\int \frac{dg\,(x)}{g^2\,(x) + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{g\,(x)}{\alpha} + c.$$

Exemple 06:
Calculer l'intégrale suivante: $\int \dfrac{dx}{x^2 + x + 1}$
$\int \dfrac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \dfrac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$
Posons $g\,(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow dg\,(x) = g'\,(x)\,dx = dx$
donc $\int \dfrac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \dfrac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \dfrac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$
$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c.$

7)

$$\int \frac{dg\,(x)}{g^2\,(x) - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{g\,(x) - \alpha}{g\,(x) + \alpha} \right| + c,$$

et

$$\int \frac{dg\,(x)}{\alpha^2 - g^2\,(x)} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{g\,(x) + \alpha}{g\,(x) - \alpha} \right| + c.$$

Exemple 07:
Calculer l'intégrale suivante: $\int \dfrac{dx}{x^2 + 3x - 4}$
$\int \dfrac{dx}{x^2 + 3x - 4} = \int \dfrac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$

Posons $g(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow dg(x) = g'(x)\,dx = dx$

donc $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4} = \int \frac{d\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} =$

$\frac{1}{2\frac{5}{2}} \ln \left| \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)}{\left(x + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)} \right| + c = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+4} \right| + c.$

Changement de variable

Si le calcul de $\int f(x)\,dx$ n'est pas immédiat, le résultat de cette intégrale peut être obtenu en changeant la variable x en la variable t à l'aide de la transformation
$x = \varphi(t)$ et l'intégrale devient

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Exemple:

Calculer l'intégrales suivante: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Posons $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ et $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ devient

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = \int \frac{2t^2 dt}{t^2+1} = 2\int \frac{\left(t^2 + 1 - 1\right) dt}{t^2+1} =$

$2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\arctan t + c = 2\sqrt{x} - 2\arctan \sqrt{x} + c$

Intégration par partie

La méthode d'intégration par partie est basée sur la formule de la différentielle du produit de deux fonctions d'une variable : $u(x) = u$ et $v(x) = v$.

Supposons que

$$f(x) = u(x)\,dv(x)$$

où les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables en x. On a

$$du(x) = u'(x)\,dx,\ \ dv(x) = v'(x)\,dx$$

et

$$d\left(uv\right)=udv+vdu$$

alors

$$\int f\left(x\right)dx=\int u\left(x\right)dv\left(x\right)dx=u\left(x\right)v\left(x\right)-\int v\left(x\right)du\left(x\right)$$

Quelques exemples d'intégration par partie

Calculer les intégrales suivantes
1) $\int x\ln xdx$
Posons $u=\ln x$ et $dv=xdx\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$ et $v=\dfrac{x^2}{2}$,
donc $\int x\ln xdx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+c.$
Remarque 01:
En général on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer les intégrales

$$\int x^n\ln xdx,\ \text{où } n\in\mathbb{R}$$

en posant

$$u=\ln x \text{ et } dv=x^n dx.$$

2) $\int xe^{3x}dx$
Posons $u=x$ et $dv=e^{3x}dx\Rightarrow du=dx$ et $v=\dfrac{e^{3x}}{3}$,
donc $\int xe^{3x}dx=\dfrac{x}{3}e^{3x}-\int\dfrac{e^{3x}}{3}dx=\dfrac{x}{3}e^{3x}-\dfrac{e^{3x}}{9}+c.$
Remarque 02:
En général on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer
les intégrales

$$\int x^{\alpha}e^{\beta x}dx,\ \text{où } \alpha\in\mathbb{N}^*,\ \beta\in\mathbb{R}$$

en posant

$$u=x^{\alpha} \text{ et } dv=e^{\beta x}dx.$$

3) $\int e^x\cos 2xdx$
Posons $u=e^x$ et $dv=\cos 2xdx\Rightarrow du=e^xdx$ et $v=\dfrac{\sin 2x}{2}$,
donc $\int e^x\cos 2xdx=\dfrac{e^x}{2}\sin 2x-\int\dfrac{e^x\sin 2x}{2}dx.$
On utilise la méthode d'intégration par partie une autre fois
Posons $u=e^x$ et $dv=\dfrac{\sin 2x}{2}dx\Rightarrow du=e^xdx$ et $v=\dfrac{-\cos 2x}{4}$,

$\int \frac{e^x \sin 2x}{2}dx = \frac{-e^x}{4}\cos 2x + \int \frac{e^x \cos 2x}{4}$, d'où
$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \int \frac{e^x \cos 2x}{4}dx$,
et $\int e^x \cos 2x dx = \frac{4}{5}\left(\frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x\right) + c$.

Remarque 03:
En général on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer les intégrales

$$\int e^{\alpha x}\cos \beta x dx, \text{ où } \left(\int e^{\alpha x}\sin \beta x dx\right) \text{ avec } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

en posant

$$u = e^{\alpha x} \text{ et } dv = \cos \beta x dx \text{ où } (\sin \beta x dx).$$

4) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$
$\arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x - \int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Calculons l'intégrale $\int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ par la méthode de l'intégration par partie en posant $u = x$ et $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow du = dx$ et $v = -\sqrt{1-x^2}$,
donc $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}dx$,
d'où $\int \sqrt{1-x^2}dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx$
$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$

Remarque 04:
On calcule toujours les intégrales de la forme

$$\left(\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx, \text{ où } n \in \mathbb{N}\right)$$

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$$u = x^{n+1} \text{ et } dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow du = (n+1)x^n dx \text{ et } v = -\sqrt{1-x^2}.$$

5) $\int x \arcsin x dx$

Posons $u = \arcsin x$ et $dv = xdx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ et $v = \frac{x^2}{2}$,
donc $\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}dx =$

$\dfrac{x^2}{2}\arcsin x - \dfrac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}dx\right) + c$
On calcule toujours les intégrales de la forme

$$\left(\int x^n \arcsin x dx,\ \text{où } n \in \mathbb{N}\right),$$

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$$u = \arcsin x \text{ et } dv = x^n dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ et } v = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned}\int x^n \arcsin x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin x - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin x - \int \frac{x^n}{(n+1)}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.\end{aligned}$$

On utilise la même méthode pour le calcul de $\left(\int x^n \arccos x dx,\ \text{où } n \in \mathbb{N}\right)$.
6) $\int x \arctan x dx$
Posons $u = \arctan x$ et $dv = xdx \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$ et $v = \dfrac{x^2}{2}$,
donc $\int x \arctan x dx = \dfrac{x^2}{2}\arctan x - \int \dfrac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}dx$
Calculons $\int \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)}dx$
$\int \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)}dx = \int \dfrac{x^2+1-1}{\left(1+x^2\right)}dx = \int dx - \int \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}dx = x - \arctan x,$
d'où $\int x \arctan x dx = \left(\dfrac{x^2}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\left(x - \arctan x\right)\right) + c.$
On calcule toujours les intégrales de la forme

$$\left(\int x^n \arctan x dx,\ \text{où } n \in \mathbb{N}\right),$$

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$$u = \arctan x \text{ et } dv = x^n dx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \text{ et } v = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

d'où

$$\int x^n \arctan x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)\left(x^2+1\right)}dx$$

et on calcule l'intégrale $\int \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\left(x^2+1\right)}dx$ en utilisant la méthode de calculs des intégrales des fonctions rationnelles.

7) $\int x\cos x dx$
Posons $u = x$ et $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$ et $v = \sin x$,
donc $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$
On calcule toujours les intégrales

$$\int x^n \sin x dx, \text{ où } \int x^n \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$$u = x^n \text{ et } dv = \sin x dx \text{ où } dv = \cos x dx \Rightarrow du = nx^{n-1}dx \text{ et } v = -\cos x \text{ où } v = \sin x$$

et on recommence par la même méthode jusqu'on arrive à

$$\int x\sin x dx \text{ où } \int x\cos x dx.$$

Intégrale de fonctions rationnelles

Calcul des intégrales de la forme $\int R(x)\, dx$, $R(x)$ est une fonction rationnelle qui s'écrit de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et en supposant que ces polynômes n'ont pas de racines communes, donc on a deux cas:

1er Cas: degrés de $P(x) <$ degrés de $Q(x)$, alors

1) Si

$$Q(x) = (x-a)^m, \ m \in \mathbb{N}^*,$$

alors on peut écrire $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forme:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_m}{(x-a)^m} + \frac{\alpha_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{\alpha_1}{(x-a)},$$

où $\alpha_m,\ \alpha_{m-1},\ \ldots, \alpha_1$ sont des constantes réelles à déterminer.

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \frac{\alpha_m}{(x-a)^m}dx + \int \frac{\alpha_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}dx + \ldots + \int \frac{\alpha_1}{(x-a)}dx \\ &= \frac{\alpha_m}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + \frac{\alpha_{m-1}}{(2-m)(x-a)^{m-2}} + \ldots + \alpha_1 \ln|x-a| + c.\end{aligned}$$

Exemple 01:
Calculer les intégrales suivantes
$\int \frac{4}{(x-2)}dx$, $\int \frac{3}{(x+1)^2}dx$, $\int \frac{(x^2+1)}{(x-1)^3}dx$
$\int \frac{4}{(x-2)}dx = 4\ln|x-2| + c$, alors $\int \frac{A}{(x-a)}dx = A\ln|x-a| + c$
$\int \frac{3}{(x+1)^2}dx = \frac{-3}{x+1} + c,$

alors on a en général

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + c,$$

où m est un nombre naturel ≥ 2

La fraction $\dfrac{(x^2+1)}{(x-1)^3}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3} = \dfrac{\alpha_3}{(x-1)^3} + \dfrac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \dfrac{\alpha_1}{(x-1)} \dots$ (**E**)

Pour trouver les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on utilise une méthode simple qui est la suivante:

On voit que $Q(x) = (x-1)^3$ s'annule au point $x = 1$.

Commençant par α_3 : On multiplie les deux cotés de l'équation (**E**) par $(x-1)^3$ et puis on remplace x par 1, on trouve $\alpha_3 = 2$.

Pour trouver α_1, α_2 on remplace x dans l'équation (**E**) par n'importe quel nombre réel différent de 1, par exemple on prend $x = 0$ et $x = 2$, on trouve respectivement les équations $-$

$1 = -2 + \alpha_2 - \alpha_1$ et $5 = 2 + \alpha_2 + \alpha_1$, d'où $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$

$\int \dfrac{(x^2+1)}{(x-1)^3}dx = \int \dfrac{2}{(x-1)^3}dx + \int \dfrac{2}{(x-1)^2}dx + \int \dfrac{1}{(x-1)}dx =$

$-2\dfrac{1}{2(x-1)^2} - 2\dfrac{1}{(x-1)} + \ln|x-1| + c.$

2) Si

$$Q(x) = (x-a)^p (x-b)^q,$$

alors on peut écrire $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la forme:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{\alpha_p}{(x-a)^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\beta_q}{(x-b)^q} \\ &+ \frac{\beta_{q-1}}{(x-b)^{q-1}} + \dots + \frac{\beta_1}{(x-b)}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int \frac{\alpha_p}{(x-a)^p}dx + \int \frac{\alpha_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}dx + \dots + \int \frac{\alpha_1}{(x-a)}dx \\ &+ \int \frac{\beta_q}{(x-b)^q}dx + \int \frac{\beta_{q-1}}{(x-b)^{q-1}}dx + \dots + \int \frac{\beta_1}{(x-b)}dx.\end{aligned}$$

Exemple 02:

Calculer $\int \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$

La fraction $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{(x+2)} *$

Pour trouver les constantes A, B et C on met les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs, ou on utilise la méthode suivante:
Pour trouver A on multiplie les deux cotés de l'équation $*$ par $(x-1)^2$, et puis on remplace x par 1, alors $A = \frac{2}{3}$
Pour trouver C on multiplie les deux cotés de l'équation $*$ par $(x+2)$, et puis on remplace x par -2, alors $C = \frac{-1}{9}$.
Pour trouver B on remplace x dans les deux cotés de l'équation $*$ par n'importe quel nombre réel différent de 1 et -2, par exemple prenant $x = 0$.
On trouve l'équation suivante: $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - B - \frac{1}{18}$, d'où $B = \frac{1}{9}$, donc

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2 (x+2)} dx = \int \frac{2}{3(x-1)^2} dx + \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x+2)} dx =$$
$$\frac{-2}{3(x-1)} + \frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \ln|x+2| + c.$$

3) Si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, où les racines du dénominateur sont complexes.

Exemple 03:

Calculer $\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2} dx$

On voit que les racines du dénominateur $3x^2+4x+2$ sont complexes, et la dérivée de $3x^2+4x+2$ est $6x+4$,alors on peut écrire la fraction $\frac{x-2}{3x^2+4x+2}$ de la forme:

$$\frac{x-2}{3x^2+4x+2} = \frac{1}{6}\left(\frac{6x+4}{3x^2+4x+2}\right) - \frac{8}{3\left(3x^2+4x+2\right)}, \text{ donc}$$
$$\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+2} dx - \frac{8}{3} \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}} dx$$
$$= \frac{1}{6} \ln\left|3x^2+4x+2\right| - \frac{8}{3} \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}} dx.$$

Calculons maintenant cette dernière intégrale:
Posons $g(x) = \left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow dg(x) = \sqrt{3}dx$,

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}} dx =$$
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \arctan \frac{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

donc
$\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2}dx = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+4x+2\right| - \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+c.$

4) Si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^m\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)}$, où les racines du polynôme $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$ sont complexes.

Exemple 04:

Calculer $\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx$

On voit que les racines du polynôme x^2+2x+2 sont complexes,
alors la fraction $\frac{x^3+4}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$ peut être décomposée de la manière
suivante: $\frac{x^3+4}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2x+2\right)}\quad *$

Pour trouver les constantes A, B, C et D, on met les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs.ou on utilise la méthode suivante:
Pour trouver A on multiplie les deux cotés de l'équation $*$ par $(x+1)^2$, et puis on remplace x par -1, alors $A=3$
Pour trouver $B,\ C$ et D on remplace x dans les deux cotés de l'équation $*$ par trois nombres réels différents de -1
Si on pose par exemple $x=0, x=1,\ x=-2$ nous trouvons un système d'équations

$2 = 3+B+\frac{D}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}+\frac{B}{2}+\frac{C+D}{5}$

$-2 = 3-B+\frac{-2C+D}{2}$

Les solutions de ce système est: $B=3,\ C=-2$ et $D=-8$.

D'où $\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx = \int \frac{3}{(x+1)^2}dx + \int \frac{3}{(x+1)}dx - \int \frac{2x+8}{\left(x^2+2x+2\right)}dx.$

Puisque la dérivée de x^2+2x+2 est $2x+2$, alors
$\int \frac{2x+8}{\left(x^2+2x+2\right)}dx = \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)}dx + \int \frac{6}{(x+1)^2+1}dx =$
$\ln\left(x^2+2x+2\right)+6\arctan(x+1)+c$ et
$\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx = \frac{-3}{(x+1)}+3\ln|x+1|-\ln\left|x^2+2x+2\right|-6\arctan(x+1)+c$.

2$^{\text{éme}}$ Cas: degrés de $P(x) \geq$ degrés de $Q(x)$, alors
Alors en utilisant la division Euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ suivant les puissances décroissantes, on peut représenter la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$comme la somme d'un polynôme et d'une fraction

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)},$$

où $B(x)$ est un polynôme de degrés < degrés de $Q(x)$.

Exemple 05:

Calculer $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx$

On a d'aprés la division Euclidienne de x^4+1 par x^2+x-2 suivant les puissances décroissantes:

$\frac{x^4+1}{(x^2+x-2)} = x^2 - x + 3 + \frac{-5x+7}{x^2+x-2}$, d'où

$\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx = \int (x^2 - x + 3)\,dx + \int \frac{-5x+7}{x^2+x-2}dx.$

On a $\frac{-5x+7}{x^2+x-2} = \frac{-5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{19}{2(x^2+x-2)}$, d'où

$\int \frac{-5x+7}{x^2+x-2}dx = \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}dx$

$\int \frac{-5x+7}{x^2+x-2}dx = \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{2}\frac{1}{2\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}\right|dx = \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

donc $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)}\right| + c.$