الفصل الثاني

الدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي

فهرس الفصل

تربط الدالة الحقيقية للمتغير الحقيقي قيمة حقيقية بأي عدد من مجال تعريفها. هذا النوع من الدوال العددية يجعل من الممكن على وجه الخصوص صياغة علاقة بين كميتين فيزيائيتين. تمميزة بمنحناها التمثيلي في المستوى المزود بمعلم، ويمكن أيضا تحديد هذه الدالة من خلال صيغة معينة أو معادلة تفاضلية أو شكل تحليلي.

1.2 الدالة العددية

تعريف 1.1.2 : لتكن E و F مجموعتان و f علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F . نقول عن f أنها دالة إذا أرفقت بكل عنصر من E عنصرا على الأكثر من F ونكتب:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

نشكل تطبيق.

تعريف 2.1.2 : نقول أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & E\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & F\subset\mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

نشكل تطبيق.

بمعنى أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان لكل عنصر x من E صورة على الأكثر في $F \in \mathbb{R}$.

مثال 1 : الدالة مقلوب x :

$$\begin{array}{rcl} f:]-\infty,0[\cup]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

1.1.2 مجموعة التعريف

تحديد مجموعة تعريف دالة عددية يعني إيجاد مجموعة الأعداد التي يمكن أن نجد صورها بهذه الدالة. ولهذا يمكن أن نعرفها كما يلي

تعريف 3.1.2 : نعرف مجموعة تعريف دالة عددية f كما يلي :

$$\boxed{D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}}$$

مجموعة التعريف تمثل مجموعة انطلاق الدالة حتى يكون $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f:\ D_f \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

نأخذ كمثال

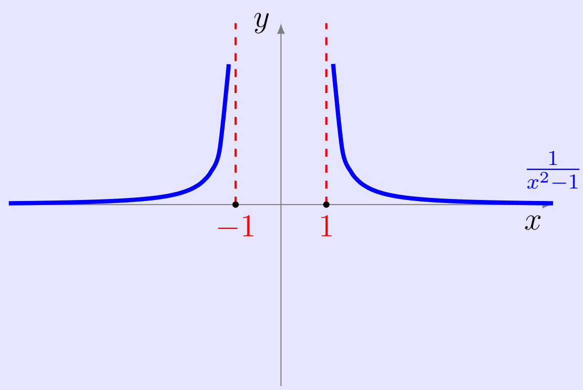
مثال 2 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)}. \end{array}$$

المتغير x يوجد بمقام الدالة . ونعلم أن مقام عدد حقيقي لا يمكن أن يساوي 0. إذن هنا لا يمكننا أن نحسب صورة العدد 1 و لا العدد -1 بالدالة f . بالتالي f معرفة على جميع الأعداد الحقيقية بإستثناء $-1,1$ و نكتب :

$$(f \text{ معرفة }) \Longleftrightarrow x^2-1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1 \wedge x=-1 \\ &\Longleftrightarrow D_f=\mathbb{R}_{-\{1,-1\}} \\ &\Longleftrightarrow D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{aligned}$$

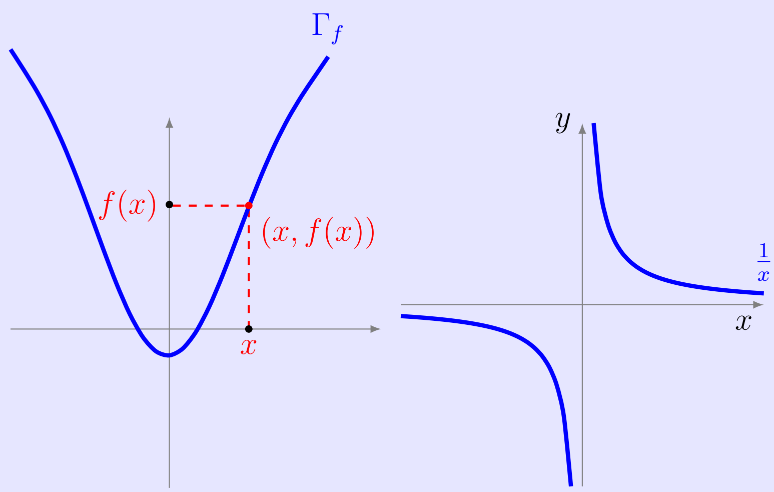


2.1.2 منحنى الدالة

تعريف 4.1.2 : منحنى الدالة $f : U \to \mathbb{R}$ هو المجموعة الجزئية Γ_f من $\mathbb{R}^2$ المعرفة كما يلي

$$\boxed{\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \mid x \in U\right\}.}$$

مثال 3 : يمينا منحنى الدالة $1/x$ ويسارا منحنى الدالة $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \sin\left(\frac{3(x-1)}{2}\right)$.



2.2 الدوال الزوجية، الفردية و الدورية

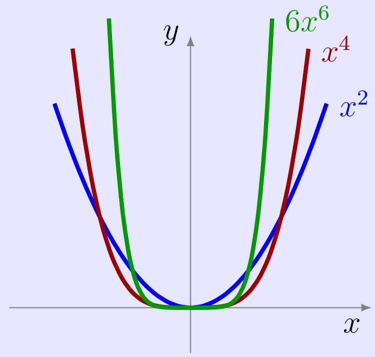
في هذا الجزء، سنتعلم كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم لا ، باستخدام الرسم البياني الخاص بها أو تعريفها. حيث يشير تناظر منحنى الدالة إلى ما إذا كانت فردية أم زوجية.

1.2.2 الدالة الزوجية

تعريف 1.2.2 : نقول أن f دالة زوجية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f\left(x\right) = f\left(-x\right).}$$

مثال 1 : الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto ax^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ زوجي



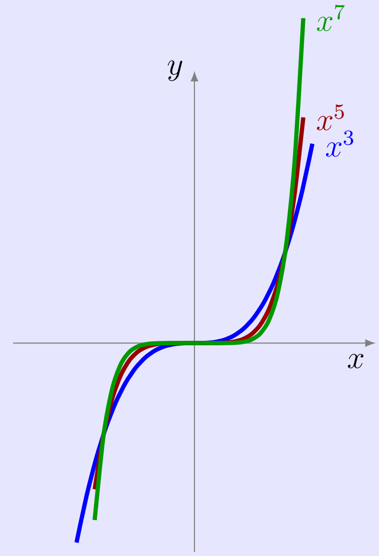
إذا كانت الدالة f زوجية فإن النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ و $M'\left(-x_0, f\left(-x_0\right)\right)$ متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب.

2.2.2 الدالة الفردية

تعريف 2.2.2 : نقول أن f دالة فردية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f\left(x\right) = -f\left(-x\right).}$$

مثال 2 : الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto x^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ فردي



إذا كانت الدالة f فردية فإن النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ و $M'\left(-x_0, f\left(-x_0\right)\right)$ متناظرتان بالنسبة للمبدأ.

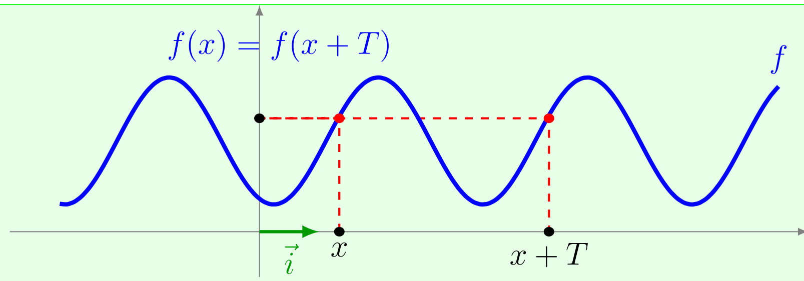
3.2.2 الدالة الدورية

بيانيا ، تشير الدوال الدورية إلى نموذج يُعاد إنتاجه بشكل متكرر في المستوي الديكارتي. لفهم مفهوم الدورية تماما ، من المهم إتقان مفاهيم الدورة والفترة.

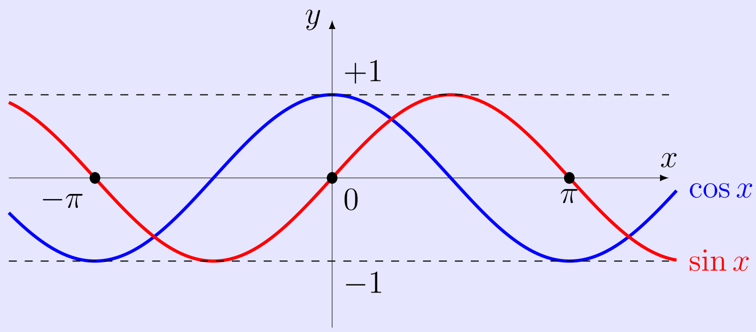
تعريف 3.2.2 : يسمى جزء الرسم البياني الذي يتوافق مع أصغر جزء من نمط متكرر بدور الدالة. و نسمى الفجوة بين اثنين من النقاط الفاصلة الموجودة في نهايات نفس الدور باسم الفترة.

تعريف 4.2.2 : نقول أن f دالة دورية إذا وجد $k > 0$ حيث :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f\left(x + k\right) = f\left(x\right).}$$



مثال 3 : الدوال *sinus* و *cosinus* دوال دورية دورها 2π والدالة *tangente* دالة دورية دورها π.



4.2.2 الدوال الموجبة و الدوال السالبة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة تعريفها D_f. و ليكن Δ مجالا من D_f.

تعريف 5.2.2 : تكون الدالة f موجبة (تماما) على Δ إذا كان

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \geq 0 \quad (f(x) > 0)\,.}$$

و تكون الدالة f سالبة (تماما) على Δ إذا كان

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \leq 0 \quad (f(x) < 0)\,.}$$

ملاحظة 1 : إذا كانت الدالة f موجبة فإن منحناها يكون فوق محور الفواصل والعكس بالنسبة لمنحنى الدالة السالبة.
إذا كانت الدالة f موجبة تماما أو سالبة تماما فإن منحناها لا يتقاطع ابدا مع محور الفواصل.

5.2.2 العمليات الجبرية على الدوال

لتكن $f : U \to \mathbb{R}$ و $g : U \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على نفس الجزء U من المجموعة $\mathbb{R}$. ومنه نستطيع تعريف الدوال التالية:

1) مجموع الدالتين f و g هو الدالة $f + g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

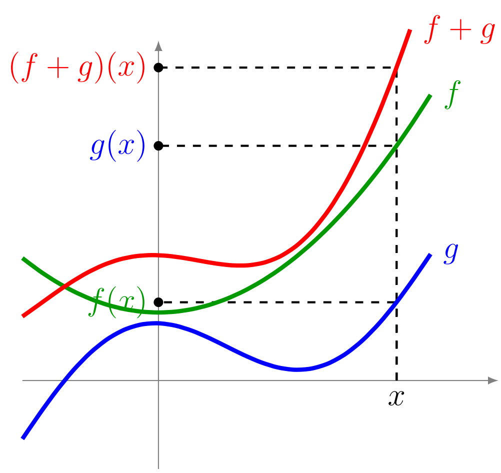
$$\forall x \in U, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) جداء الدالتين f و g هو الدالة $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall x \in U, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3) الجداء بسلمي $\lambda \in \mathbb{R}$ والدالة f هو الدالة $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall x \in U, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$



6.2.2 مقارنة دالتين

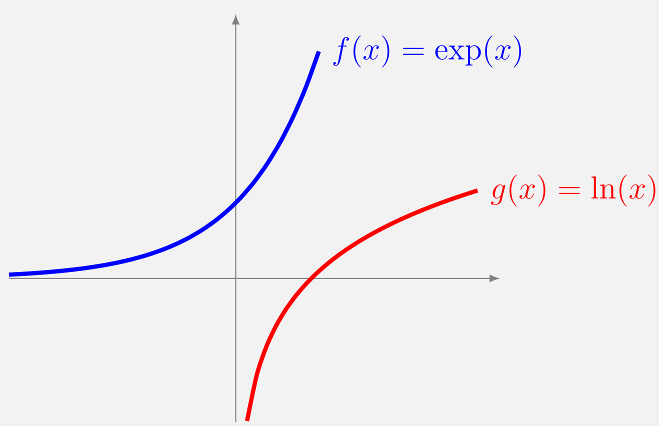
لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس الجزء $\Delta \subset D_f \cap D_g$. ومنه نقول أن f أصغر من أو يساوي g ونكتب :

$$\boxed{f \leq g \text{ إذا كان } \forall x \in \Delta, f(x) \leq g(x).}$$

و نقول أن f أكبر من أو يساوي g ونكتب

$$\boxed{f \geq g \text{ إذا كان } \forall x \in \Delta, f(x) \geq g(x).}$$

ملاحظة 2 : إذا كانت الدالة f أكبر من أو يساوي g فإن منحنى الدالة f يكون فوق منحنى الدالة g .



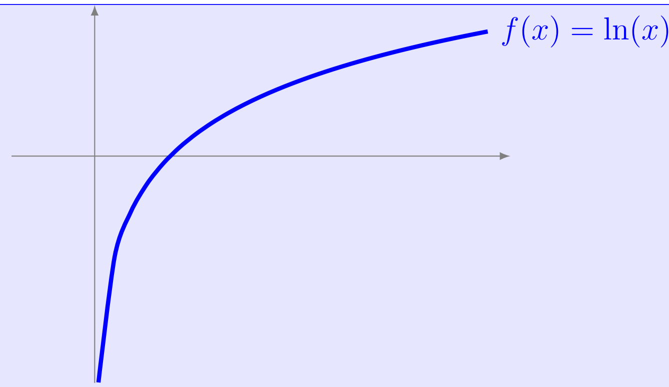
7.2.2 رتابة دالـــة

لتكن f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن I مجالا من D_f.

تعريف 6.2.2 : نقول أن f متزايدة على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \geq f(y).}$$

مثال 4 : الدالة لوغاريتم $x \mapsto \ln(x)$ دالة متزايدة على المجال $]0, +\infty[$.



تعريف 7.2.2 : نقول أن f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) > f(y).}$$

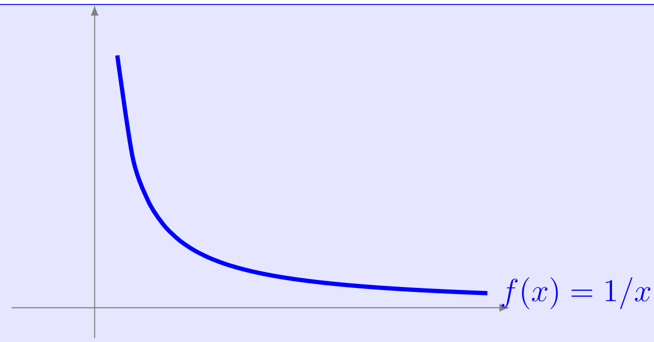
تعريف 8.2.2 : نقول أن f متناقصة على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \leq f(y).}$$

تعريف 9.2.2 : نقول أن f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) < f(y).}$$

مثال 5 : الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$.



8.2.2 الدالة المحدودة

قبل البدء في البحث ما إذا كانت الدالة محدودة أو لا لابد ان تكون الدالة معرفة على مجموعة غير خالية ثم نبدأ في البحث عن حدود الدالة.

تعريف 10.2.2 : لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f.

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :

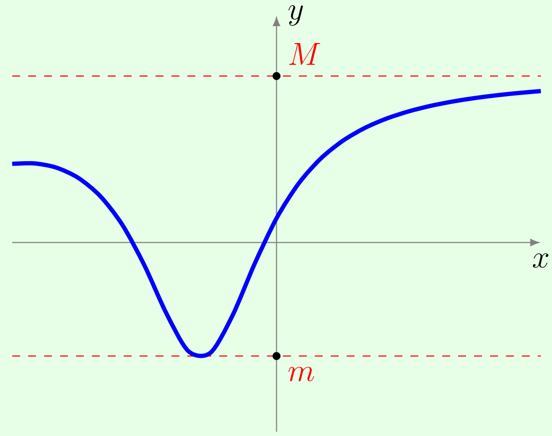
$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \leq M.}$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :

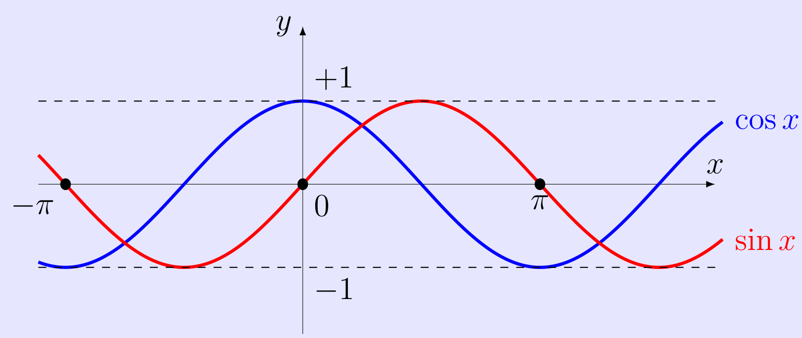
$$\boxed{\forall x \in D_f \quad m \leq f(x).}$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث :

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad m \leq f(x) \leq M.}$$



مثال 6 : الدوال $sinus$ و $cosinus$ دوال محدودة.



9.2.2 القيم القصوى والدنيا لدالة

تعريف 11.2.2 : لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و ليكن $x_0 \in D_f$ و I مجال من D_f.

1) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

2) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة قصوى نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

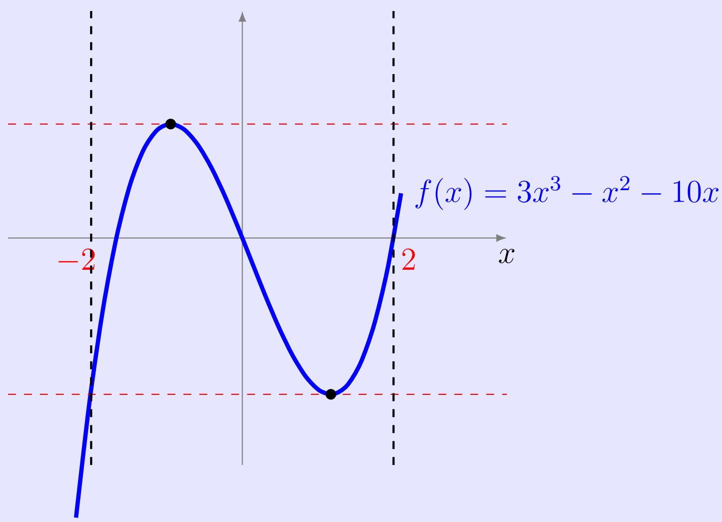
3) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة الدنيا المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

4) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة دنيا نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

مثال 7 : الدالة f تقبل حد علوي وآخر سفلي في النقطتين المحددتين في الرسم على المجال $[2,2]$.



3.2 النهايـــات

تعتبر النهايات من أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات ومن المفاهيم المهمة في التحليل حيث يعتمد عليها مفهوم الاستمرار والاشتقاق والتكامل. ولا شك في أن القارئ قد سبق له دراسة موضوع النهايات، لكن في هذا الفصل ندرس النهايات بشكل أكثر دقة.

1.3.2 تعاريـــف

النهاية عند نقطة

تعريف 1.3.2 : نقول أن المجموعة الجزئية V من $\mathbb{R}$ أنه جوار النقطة x_0 إذا كانت تحتوي على مجال مفتوح يحوي النقطة x_0

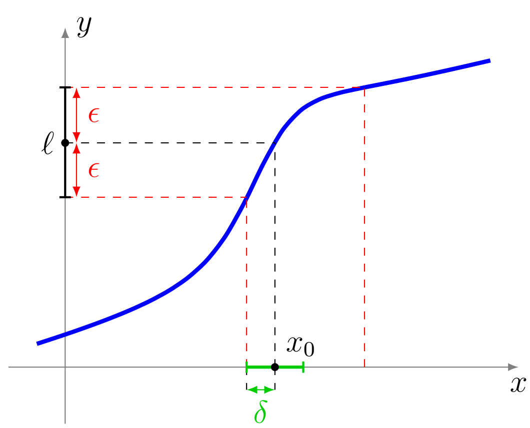
لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

تعريف 2.3.2 : نقول أن الدالة f المعرفة في جوار النقطة x_0 (ربما تكون غير معرفة عند النقطة x_0) أنها تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عند النقطة x_0 اذا كان:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ℓ لما x يؤول الى x_0 و نكتب :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ أو } \lim_{x_0} f = \ell.}$$



مثال 1 : لتكن $f(x) = 3x - 2$ المطلوب إيجاد النهاية عند النقطة $x_0 = 1$.

لدينا

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x - 2) = 1$$

وباستعمال التعريف نجد

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}|x-1|<\delta &\implies |3x-2-1|<\epsilon\\ &\implies |3x-3|<\epsilon\\ &\implies |3(x-1)|<\epsilon\\ &\implies 3|(x-1)|<\epsilon\\ &\implies |(x-1)|<\frac{\epsilon}{3}\end{aligned}$$

يعني يكفي أن نأخذ القيمة $\delta=\frac{\epsilon}{3}$ لكي نجد أن

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

لتكن f دالة معرفة على المجموعة من الشكل $]a,x_0[\cup]x_0,b[$.

تعريف 3.3.2 : 1) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $+\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall A>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\delta \implies f(x)>A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.}$$

2) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $-\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

$$\boxed{\forall A>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad |x-x_0|<\delta \implies f(x)<-A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.}$$

لتكن الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ المعرفة على مجموعة من الشكل $I=]a,+\infty[$.

تعريف 4.3.2 : 1) ليكن $\ell\in\mathbb{R}$ نقول أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند $+\infty$ إذا كان

$$\boxed{\forall\epsilon>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in I \quad x>B \implies |f(x)-\ell|<\epsilon.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{أو} \quad \lim_{+\infty} f=\ell.}$$

2) ونقول أن الدالة f تقبل النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ إذا كان

$$\boxed{\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in I \quad x>B \Longrightarrow f(x)>A.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$$

بنفس الطريقة نعرف النهاية عند $-\infty$ إذ كانت الدالة معرفة على مجموعة من الشكل $]-\infty,a[$.

2.3.2 العمليات على النهايات

لتكن الدالتين f و g . لتكن النقطة x_0 حيث $x_0=\pm\infty$.

قضية 1 : إذا كان

$$\lim_{x_0} f=\ell\in\mathbb{R} \text{ و } \lim_{x_0} g=\ell'\in\mathbb{R}$$

فإن :

- من أجل كل $\lambda\in\mathbb{R}$ فإن $\lim_{x_0}(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\ell$
- $\lim_{x_0}(f+g)=\ell+\ell'$
- $\lim_{x_0}(f\cdot g)=\ell\cdot\ell'$
- إذا كان $\ell\neq 0$، ومنه $\lim_{x_0}\frac{1}{f}=\frac{1}{\ell}$

إذا كان أيضا $\lim_{x_0} f=+\infty$ (أو $-\infty$) فإن $\lim_{x_0}\frac{1}{f}=0$.

4.2 الإستمرار

1.4.2 الإستمرار عند نقطة

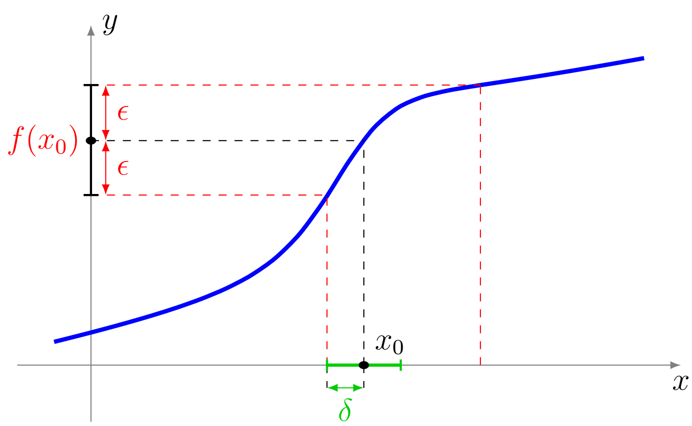
تعريف 1.4.2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا تحقق مايلي :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.}$$

ونكتب

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$



مثال 1 : الدالة $f(x) = e^x$ مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ لأن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1 = f(x_0).$$

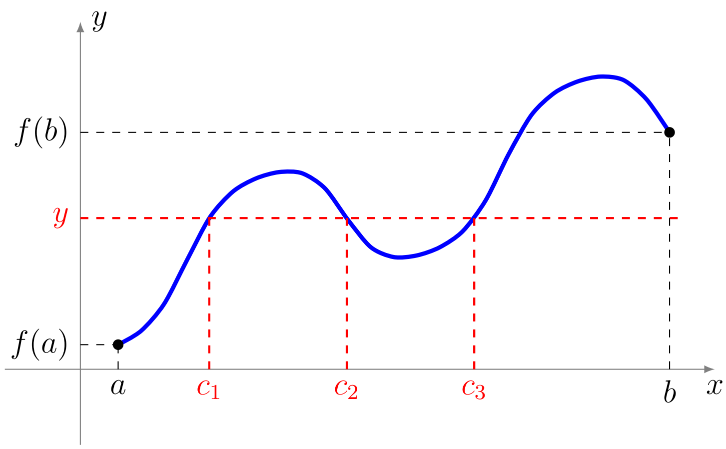
2.4.2 الإستمرار على مجال

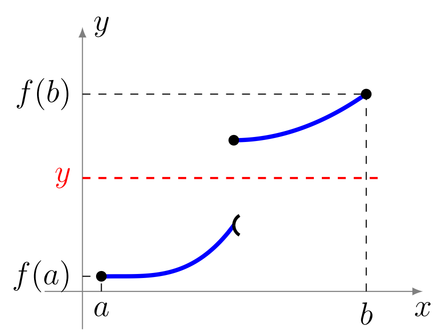
تعريف 2.4.2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$.
نقول أن الدالة f مستمرة على المجال I إذاكانت مستمرة على جميع نقاط المجال I. نرمز لمجموعة الدوال المستمرة على مجال I بالرمز $\mathscr{C}(I)$.

نظرية القيم المتوسطة

نظرية 1.4.2 : 《*Théorème des valeurs intermédiaires*》 لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ المستمرة على القطعة المستقيمة $[a,b]$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي y محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ حيث $f(c)=y$.

(في الشكل الأيسر) ، فإنالعدد الحقيقي c ليس بالضرورة فريدًا. من ناحية أخرى، إذا لم تكن الدالة مستمرة، فلن تعد النظرية صحيحة (الشكل على اليمين).





3.4.2 الإمتداد بالإستمرار

تعريف 3.4.2 : ليكن المجال I و لتكن النقطة x_0 من I و $f: I_{\{x_0\}}\to\mathbb{R}$ دالة.

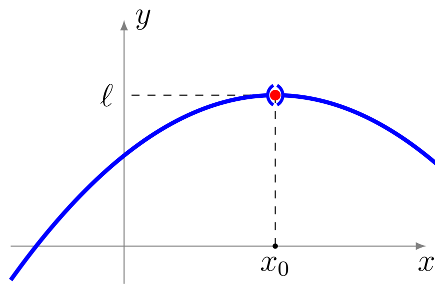
1) نقول أن الدالة f قابلة للتمديد بالإستمرار عند النقطة x_0 إذا كانت f تقبل نهاية منتهية عند x_0. ونكتب:

$$\ell=\lim_{x_0} f.$$

2) نعرف حينها الدالة التي نرمز لها بالرمز $\tilde{f}: I\to\mathbb{R}$ من أجل كل $x\in I$

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{إذا كان } x\neq x_0\\ \ell & \text{إذا كان } x=x_0.\end{cases}$$

ومنه الدالة $\tilde{f}$ مستمرة عند النقطة x_0 ونسمى تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة x_0.



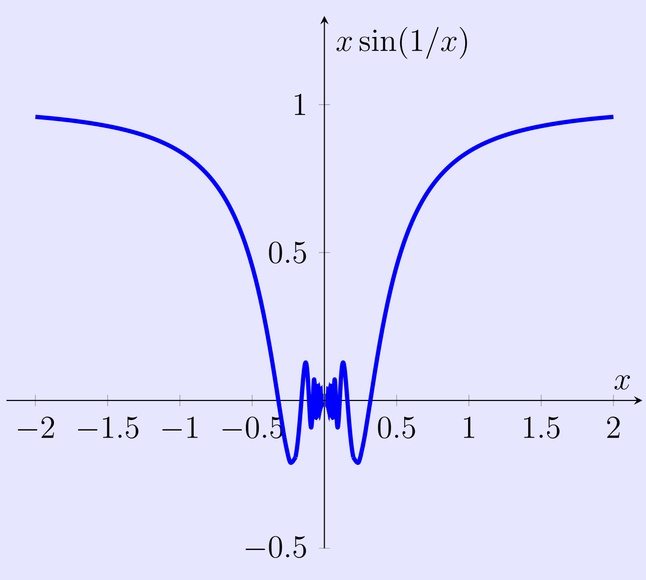
مثال 2 : لتكن الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

هل f تقبل التمديد بالإستمرار عند 0 ؟

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $|f(x)| \leq |x|$، نستنتج أن f تؤول لـ 0 عند 0. أي أنها قابلة للتمديد بالإستمرار عند 0 وتمديدها هو الدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0. \end{cases}$$



4.4.2 العمليات على الدوال المستمرة

العمليات الأولية على الاستمرارية هي نتائج فورية للقضايا المماثلة على النهايات.

قضية 1 : لتكن الدالتين $f, g : I \to \mathbb{R}$ لتكن النقطة $x_0 \in I$. ومنه

- $\lambda \cdot f$ مستمرة عند x_0 (من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$)،
- $f + g$ مستمرة عند x_0،
- $f \cdot g$ مستمرة عند x_0،
- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، ومنه $\frac{1}{f}$ مستمرة عند x_0.

قضية 2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : J \to \mathbb{R}$ دالتين حيث $f(I) \subset J$. إذا كانت f مستمرة عند النقطة $x_0 \in I$ و إذا كانت g مستمرة عند النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة تركيب $g \circ f$ مستمرة عند النقطة x_0.

5.2 المشتق و قوانين الإشتقاق

1.5.2 المشتق في نقطة

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة. ولتكن $x_0 \in I$.

تعريف 1.5.2 : نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت نسبة التزايد

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

تقبل نهاية ثابتة لما x يؤول للقيمة x_0.
نسمى هذه النهاية العدد المشتق أو قيمة المشتق للدالة f عند القيمة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

ونكتب

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

تعريف 2.5.2 : نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق على كل نقطة $x_0 \in I$.

الدالة $x \mapsto f'(x)$ نسمى دالة المشتق نرمز لها بالرمز f' أو $\frac{df}{dx}$.

مثال 1 : الدالة المعرفة $f(x) = x^2$ قابلة للإشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$. ولدينا:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

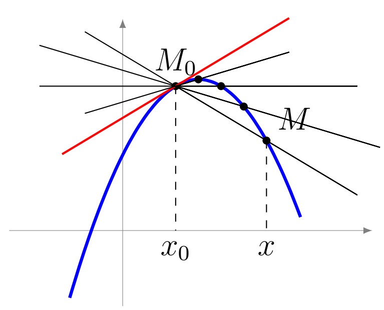
حتى أنه أثبتنا أن العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $2x_0$، أو أيضا يمكننا كتابة : $f'(x) = 2x$.

2.5.2 التفسير الهندسي للمشتق

الخط المستقيم الذي يمر عبر نقاط مميزة $(x_0, f(x_0))$ و $(x, f(x))$ له معامل توجيه القيمة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. في النهاية نجد أن معامل توجيه الظل هو القيمة $f'(x_0)$.

معادلة المماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي

$$\boxed{y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).}$$



قضية 1 : لتكن f دالة فإن:

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كانت النهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

موجودة ومنتهية.

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد $\ell\in\mathbb{R}$ (الذي يساوي $f'(x_0)$) و دالة $\epsilon: I\to\mathbb{R}$ حيث $\epsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ مع

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\ell+(x-x_0)\epsilon(x).$$

قضية 2 : ليكن المجال I المفتوح و $x_0\in I$ ولتكن $f: I\to\mathbb{R}$ دالة.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0.
- إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن f مستمرة على I.

مثال 2 : ليكن c عددحقيقي ثابت. ولتكن الدالة الثابتة f التي تأخذ القيمة c. نحسب مشتق الدالة الثابتة:

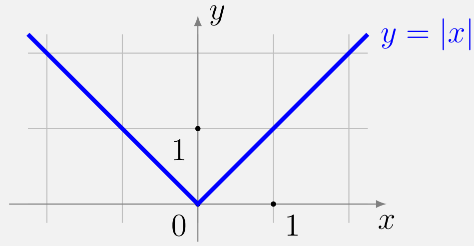
$$\forall x\in\mathbb{R},\forall h\in\mathbb{R}^*,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

ومنه:

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

وبالتالي فإن مشتق الدالة الثابتة معدوم.

ملاحظة 1 : العكس خاطئ: على سبيل المثال ، دالة القيمة المطلقة $f(x)=|x|$ مستمر في 0 ولكنه غير قابلة الإشتقاق عند 0.



وبالفعل، فإن معدل الزيادة عند $x_0 = 0$ يحقق :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كان } x > 0 \\ -1 & \text{إذا كان } x < 0 \end{cases}.$$

3.5.2 حساب المشتق

قضية 3 : لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال I. ومنه من أجل كل $x \in I$ لدينا:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ حيث λ عدد حقيقي ثابت
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (إذا كان $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (إذا كان $g(x) \neq 0$)

ملاحظة 2 : من الأسهل حفظ المساواة التالية:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \cdot g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

قضية 4 : إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق عند x و g دالة قابلة للإشتقاق عند $f(x)$ فإن التركيب $g \circ f$ دالة قابلة للإشتقاق عند x ومشتقها من الشكل:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).}$$

مشتق بعض الدوال المألوفة

الجدول الموجود على اليسار هو ملخص للصيغ الرئيسية التي يجب معرفتها ، x متغير.
الجدول الموجود على اليمين هو جدول التراكيب ، u يمثل وظيفة $x \mapsto u(x)$.

الدالة	المشتق
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

الدالة	المشتق
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

مثال 3 : لنحسب مشتق الدالة $\ln(1+x^2)$. لدينا $g(x)=\ln(x)$ مع $g'(x)=\frac{1}{x}$ و $f(x)=1+x^2$ مع $f'(x)=2x$. و منه مشتق التركيب $\ln(1+x^2)=g\circ f(x)$ هو

$$(g\circ f)'(x)=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)=g'\big(1+x^2\big)\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}.$$

4.5.2 المشتقات المتوالية

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق وليكن f' مشتقها. إذا كانت الدالة المشتقة $f':I\to\mathbb{R}$ أيضا دالة قابلة للإشتقاق فإن $f''=(f')'$ المشتق الثاني للدالة f. بصفة عامة :

$$f^{(0)}=f,\quad f^{(1)}=f',\quad f^{(2)}=f''\quad \text{و....}\quad f^{(n+1)}=\big(f^{(n)}\big)'$$

إذا كان المشتق $f^{(n)}$ من الدرجة n موجود، نقول f قابلة للإشتقاق n مرة.

نظرية 1.5.2 : 《علاقة ليبنيز》

$$\boxed{(f\times g)^{(n)}=f^{(n)}\times g+C_n^1f^{(n-1)}\times g^{(1)}+\cdots+C_n^k\,f^{(n-k)}\times g^{(k)}+\cdots+f\times g^{(n)}}$$

وبعبارة أخرى :

$$\boxed{(f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,f^{(n-k)}\times g^{(k)}.}$$

لنبرهن بالتراجع صحة صيغة ليبنيز: من أجل $n=0$ لدينا :

$$(f\times g)^{(0)}(x)=(f\cdot g)(x)=\sum_{k=0}^{0}C_0^kf^{(k)}(x)g^{(0-k)}(x)=f\,(x)\,g\,(x)$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$. نفرض أن:

$$(f\times g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

ولنبين أن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kf^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

لدينا :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=((f\times g)^{(n)})'(x).$$

إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)'$$

وبالتالي :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right)$$

إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x).$$

نقوم بتغيير المتغير في المجموع الأول : $p=k+1$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x)=\sum_{p=1}^{n+1}C_n^{p-1}f^{(p)}(x)g^{(n+1-p)}(x)$$

وبالتالي :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)+\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

إذن :

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(n+1)}(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)\times\left(f^{(k)}(x)\ g^{(n+1-k)}(x)\right)\right)\\ &\quad +C_n^n f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+C_n^0 f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

لاحظ أن : $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ و $C_n^n=C_n^0=1$ إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right)+f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)$$

لاحظ أنه يمكننا إدخال الحدين الأخيرين في المجموع :

$$C_{n+1}^0 f^{(0)}(x)g^{(n+1-0)}(x)=f^{(0)}(x)\ g^{(n+1)}(x)$$

و

$$C_{n+1}^{n+1}f^{(n+1)}g^{(n+1-(n+1))}(x)=f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)$$

إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

إذن حسب البرهان بالترجع لدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N},\, n \leq p)(\forall x \in I) \ : \ (f\times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

6.2 الدوال المثلثية و مقلوبها

1.6.2 الدالة تجب و الدالة قوس التجب

لتكن الدالة تجب التي نرمز لها بالرمز cosinus حيث:

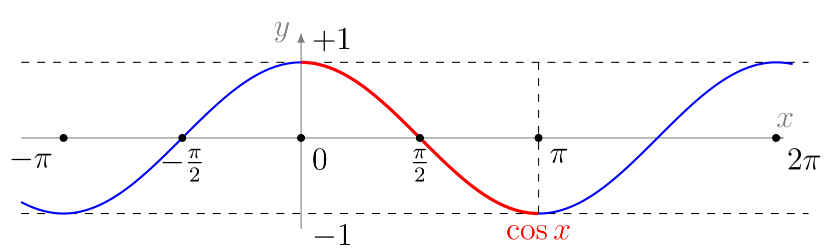
$$\begin{aligned} \cos \ &: \mathbb{R} \ \to [-1,1] \\ x \ &\mapsto \cos x, \end{aligned}$$

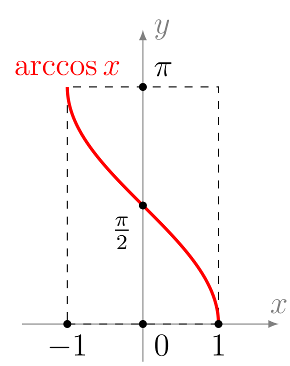
للحصول على تقابل من هذه الدالة يكفي أخذها على المجال $[0,\pi]$. في هذه المجال، تكون الدالة تجب مستمرة ومتناقصة تماما، وبالتالي فإن الإقتصار:

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

هو تقابل. ودالته العكسية التقابلية تدعى قوس التجب arccosinus ونكتب:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





لذلك لدينا، من خلال تعريف التقابل العكسي :

$$\cos\left(\arccos(x)\right) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$\arccos\left(\cos(x)\right) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$$

بعبارات أخرى:

إذا كان $x \in [0,\pi]$ $\quad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$

فإن مشتق الدالة العكسية هو:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]-1,1[$$

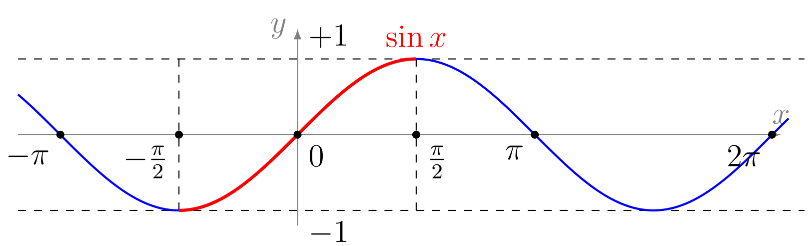
2.6.2 الدالة جب و الدالة قوس الجب

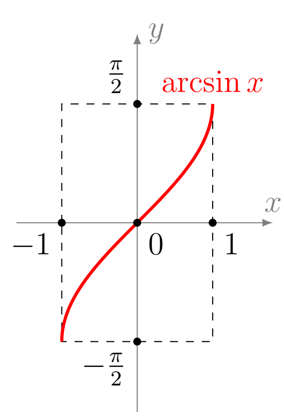
إقتصار الدالة جب على المجال $[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ **المعرف**

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

هو دالة تقابلية. تقابلها العكسي يدعى قوس الجب ونرمز له بالرمز arcsinus **حيث:**

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}]$$





ولدينا:

$$\sin\big(\arcsin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$\arcsin\big(\sin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

إذا كان $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}]$ $\qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y,$

فإن مشتق الدالة العكسية هو:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

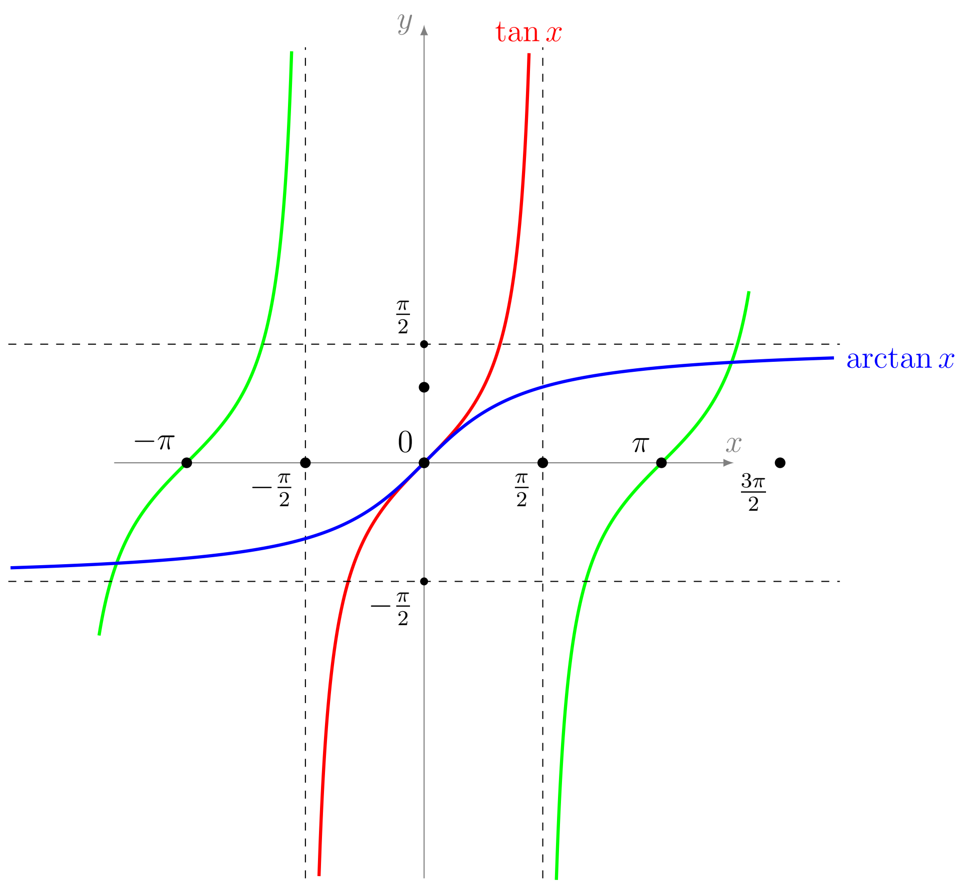
3.6.2 الدالة ضل و الدالة قوس الضل

إقتصار الدالة ضل على المجال $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

هو دالة تقابلية. نسمي تقابلها العكسي بقوس الضل ونرمز له بالرمز arctangente حيث :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$



$$\tan\big(\arctan(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\arctan\big(\tan(x)\big) = x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$

إذا كان $\tan(x) = y \iff x = \arctan y, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

فإن مشتق الدالة العكسية هو:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.2 الدوال الزائدية ومقلوبها

الدوال الزائدية أو الدوال الزائدة في الرياضيات هي الدوال المماثلة للدوال المثلثية أو الدائرية. لأنها دوال مشتقة من دالة القطع الزائد تم تقديم هذه الدوال من قبل الرياضي السويسري جوهان هنرك لامبرت و لها خواص شبيهة جدا بالدوال المثلثية كما سيتبين لاحقا.

1.7.2 دالة جيب التمام الزائدي ومقلوبها

من أجل $x \in \mathbb{R}$، **الدالة جيب التمام الزائدي** cosinus hyperbolique **هي الدالة المعرفة:**

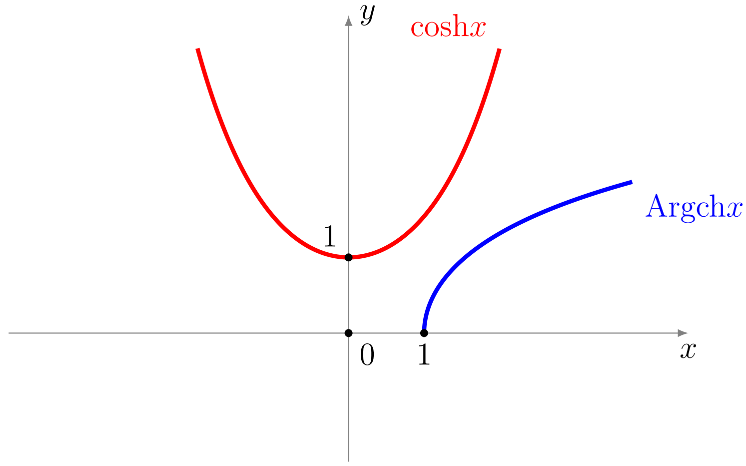
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

إقتصارها على المجال $[0, +\infty[$ **حيث نكتب:**

$$\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$$

يجعل منها دالة تقابلية. نرمز لتقابلها العكسي بالرمز Argch **حيث**

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$



2.7.2 دالة الجيب الزائدي ومقلوبها

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ دالة الجيب الزائدي sinus hyperbolique التي نرمز لها بالرمز :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هي دالة مستمرة، قابلة للإشتقاق ومتزايدة تماما تحقق مايلي:

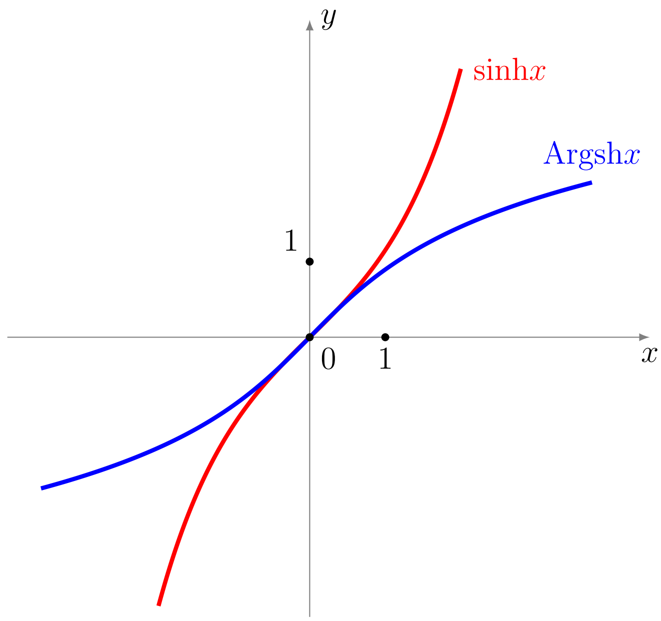
$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$$

و

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty,$$

هذا يعني أنها دالة تقابلية. وتقابلها العكسي هو:

$$\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$



قضية 1 :
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh' x = \sinh x$ و $\sinh' x = \cosh x$
- $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متزايدة تماما و مستمرة.
- Argsh دالة قابلة للإشتقاق حيث: $\mathrm{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\mathrm{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

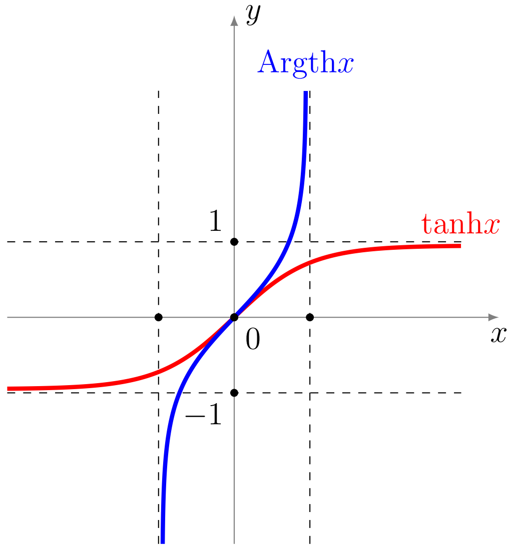
3.7.2 دالة الظل الزائدي ومقلوبها

بالتعريف، دالة الظل الزائدي tangente hyperbolique **التي نرمزلها بالرمز:**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

هي دالة معرفة $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ **وتقابلية، نرمز لتقابلها العكسي بالرمز:**

$$\mathrm{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}.$$



4.7.2 العلاقات المثلثية للدوال الزائدية

(1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(2

$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b\\ \cosh(2a) &= \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1\\ &= 1 + 2\sinh^2 a\end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a\\ \sinh(2a) &= 2\sinh a \cdot \cosh a\end{aligned}$$

(4

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$$

(5 مشتق الدوال الزائدية

$$\cosh' x = \sinh x.$$

$$\sinh' x = \cosh x.$$

$$\tanh'^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

6) **مشتق الدوال مقلوب الدوال الزائدية**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argch}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x>1)\\
\mathrm{Argsh}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\
\mathrm{Argth}'x &= \frac{1}{1-x^2}, \quad (|x|<1)
\end{aligned}$$

(7

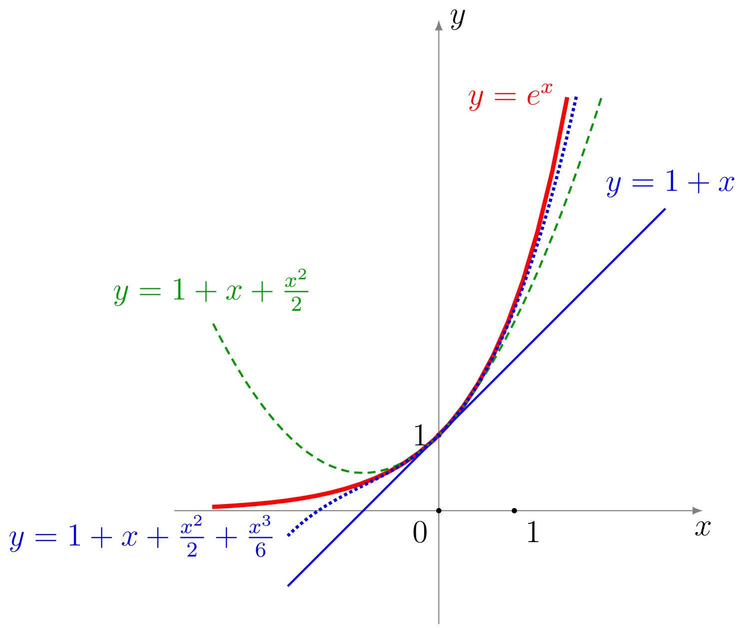
$$\begin{aligned}
\mathrm{Argch}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad (x\geq 1)\\
\mathrm{Argsh}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad (x\in\mathbb{R})\\
\mathrm{Argth}x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (-1<x<1)
\end{aligned}$$

8.2 النشر المحدود

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x)=\exp x$ **حول النقطة** $x=0$ **بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته** $y=1+x$. **لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.**

إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y=c_0+c_1x+c_2x^2$، **الرسم البياني للدالة** f **في جوار النقطة** $x=0$ **هو مثل المعادلة** $y=1+x+\frac{1}{2}x^2$. **هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي** $g(x)=\exp x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$ **ثم** $g(0)=0$ ، $g'(0)=0$ **و** $g''(0)=0$. **نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة** 2 **للدالة** f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة ...



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

1.8.2 صيغ تايلور

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

نظرية 1.8.2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0) \end{aligned}$$

حيث

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

مثال 1 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} f:]-1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى. لدينا: $f(0)=0$. ثم نحسب $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ نجد $f'(0)=1$. بعدها نحسب $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ نجد $f''(0)=-1$. وأخيرا نحسب $f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ ونجد $f^{(3)}(0)=2$.
نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n>0$ لدينا :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

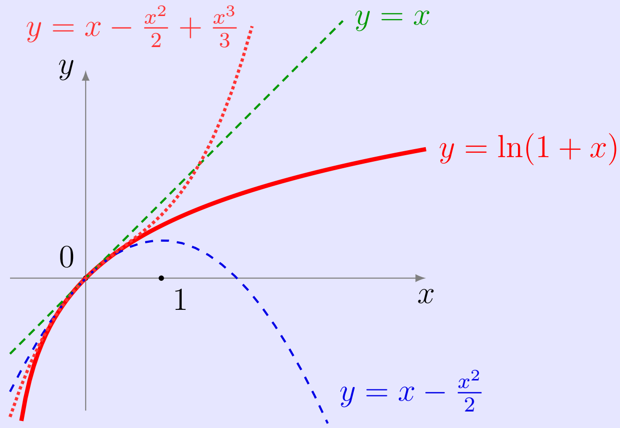
بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x-\frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.



2.8.2 صيغ ماك ـ لوران

نظرية 2.8.2 : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ وليكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x)}$$

مثال 2 :

$$1)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4)e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$5)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

3.8.2 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة

★ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

★ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

★ $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

★ $sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

4.8.2 عمليات على النشر المحدود

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك ـ لوران أنه يمكن أن نغير نشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.
لتكن $n \in \mathbb{N}$. ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

قضية 1 : • $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=T_n(x)+x^n\epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $P_n(x)\cdot Q_n(x)$ المتوقف عند الدرجة n.

- إذا كانت $g(0)=0$ (أي $q_0=0$) فإن الدالة $f\circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0\neq 0$ فإن لدينا:

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{q_0}\frac{1}{1+\frac{q_1}{q_0}x+\cdots+\frac{q_n}{q_0}x^n+\frac{x^n\epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :

$$F(x)=P_{n+1}(x-a)+(x-a)^{n+1}\eta(x)$$

حيث: $\lim\limits_{x\to a}\eta(x)=0$.

مثال 3 : حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.
نعلم أن:

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

نضع .

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

و $F(x)=\arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+x^{2n}\epsilon(x).$$

ولأن $\arctan(0)=0$ فإن:

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+x^{2n+1}\epsilon(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

مثال 4 : • النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

أولا

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x).$$

من جهة أخرى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$$

نضع

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x).$$

نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

ثم

$$u^3 = x^5\epsilon(x).$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).
\end{aligned}$$

في الأخير

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).
\end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+o(x^4)\end{aligned}$$

مثال 5 : حساب النشر المحدود للدالة $h(x)=\sin\left(\ln(1+x)\right)$ عند 0 من الرتبة 3.

- نضع $f(u)=\sin u$ و $g(x)=\ln(1+x)$ ومنه:

$$f\circ g(x)=\sin\left(\ln(1+x)\right) \quad \text{و} \quad g(0)=0.$$

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

$$f(u)=\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع

$$u=g(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2: $u^2=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)\right)^2=x^2-x^3+x^3\epsilon_3(x)$ و u^3 :

$$u^3=x^3+x^3\epsilon_4(x).$$

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

9.2 سلسلة التمارين رقم 2

تمرين 1 : أحسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

1. $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$ **2.** $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-25}$

3. $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$ **4.** $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

الحــل

1) لدينا $\lim_{x\to5} x^2-11x+28=-2$ و $lim_{x\to5}x^2-25=0$. علينا الانتباه إلى إشارة المقام. من أجل $x>5$ لدينا $x^2>25$ ومنه $\lim_{x\to5^+} x^2-25=0^+$. نستنتج :

$$\lim_{x\to5^+}\frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=-\infty.$$

2) نسير بنفس الطريقة، لكن نلاحظ أن: $\lim_{x\to5^-} x^2-25=0^-$. في هذه الحالة لدينا:

$$\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=+\infty.$$

3) لدينا $\lim_{x\to5} x^2-9x+20=0$، وبالتالي هي حالة عدم تعيين $0/0$. سنزيلها عن طريق تحليل البسط والمقام إلى الجذر المشترك. وبالتالي ينتج لنا:

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$