7.2 سلسلة التمارين رقم 3

تمرين 1 : . احسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

1. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$ 2. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$

3. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$ 4. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

الحــل

1) **لدينا** $\lim_{x\to 5} x^2-11x+28=-2$ **و** $lim_{x\to 5}x^2-25=0$. **علينا الانتباه إلى إشارة المقام.**
من أجل $x>5$ **لدينا** $x^2>25$ **ومنه** $\lim_{x\to 5^+} x^2-25=0^+$. **نستنتج :**

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=-\infty.$$

2) **نسير بنفس الطريقة، لكن نلاحظ أن:** $\lim_{x\to 5^-} x^2-25=0^-$. **في هذه الحالة لدينا:**

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=+\infty.$$

3) **لدينا** $\lim_{x\to 5} x^2-9x+20=0$، **وبالتالي هي حالة عدم تعيين** $0/0$. **سنزيلها عن طريق تحليل البسط والمقام إلى الجذر المشترك. وبالتالي ينتج لنا:**

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$

من ناحية أخرى

$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4).$$

نستطيع أن نكتب:

$$\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-4}{x+5}.$$

هنا لاتوجد حالة عدم التعيين، وعليه:

$$\lim_{x\to 5} x-4=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 5} x+5=10.$$

⟪4⟫ نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{1}{10}.$$

ولسنا بحاجة لدراسة النهاية يمينا و يسارا.

تمرين 2 : احسب النهايات التالية :

$\mathbf{1}.\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}$ $\quad$ $\mathbf{2}.\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x$

الحـــل

في كل حالة ، سنضرب في المرافق:

(1

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}&=\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{(x+4)-(x-4)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}.\end{aligned}$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين) ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=0.$$

(2

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x&=\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\&=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\\&=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.\end{aligned}$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x=0.$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x} \qquad \textbf{2.}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{x+3}$$
$$\textbf{3.}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{x}+2e^{x}-5}{e^{x}-3} \qquad \textbf{4.}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}.$$

الحــل

1) نخرج e^{2x} كعامل مشترك. نجد :

$$e^{2x}-e^{x}=e^{2x}\left(1-\frac{e^{x}}{e^{2x}}\right)=e^{2x}(1-e^{-x}).$$

في حين $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x}=+\infty.$$

2) نخرج e^{2x} كعامل مشترك في البسط و x في المقام نجد:

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3}=\frac{e^{2x}}{x}\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

في حين لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1,\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}=1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

من ناحية أخرى، من خلال التزايد، لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}=+\infty.$$

أخيرا، نستنتج بحاصل ضرب النهايات هو:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{x+3}=+\infty.$$

3) نخرج xe^x عامل مشترك من البسط و e^x من المقام نجد :

$$\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=\frac{xe^x}{e^x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=x\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}.$$

ولأن $\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين)، لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ يعطينا:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}1-3e^{-x}=1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=1.$$

نستنتج بحاصل ضرب النهايتين أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=+\infty.$$

4) نخرج x^2 كعامل مشترك من البسط والمقام نجد:

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

لأن $-1\le\sin x\le1$ لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

ومنه حسب النظرية $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. نبرهن بنفس الطريقة أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. نجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

تمرين 4 : بإستعمال التعريف أي أوجد (ϵ,δ)، لدراسة نهاية الدالة x^3 عند 1.

الحـــل

نأخذ $\epsilon>0$. نبحث عن $\delta>0$ حيث، إذا كان $|x-1|<\delta$ فإن $|x^3-1|<\epsilon$ (لأن النهاية هي 1). نستطيع أن نفرض أن $\epsilon\le1$ فإذا وجد δ من أجل $\epsilon=1$،نفس الـ δ يوافق $\epsilon\ge1$. لكن $\delta>0$ حيث $|x-1|<\delta$. فإن $1-\delta\le x\le1+\delta$ نقوم بتكعيب الأطراف ولأن الدالة مكعب x^3 متزايدة فإن

$$1-3\delta+3\delta^2-\delta^3\le x^3\le1+3\delta+3\delta^2+\delta^3.$$

هذا يكافئ:

$$-3\delta+3\delta^2-\delta^3\leq x^3-1\leq 3\delta+3\delta^2+\delta^3.$$

يكفي أن نأخذ $\delta\in]0,1]$ حيث

$$-3\delta+3\delta^2-\delta^3\geq -\epsilon$$

و

$$3\delta+3\delta^2+\delta^3\leq \epsilon.$$

نفرض أن $\delta\leq c\epsilon$ و $c>0$ ثابت ومنه

$$3\delta+3\delta^2+\delta^3=3c\epsilon+9c^2\epsilon^2+c^3\epsilon^3\leq(3c+9c^2+c^3)\epsilon$$

لأن $\epsilon\leq 1$ و

$$-3\delta+3\delta^2-\delta^3\geq -3\delta-3\delta^2-\delta^2\geq-(3c+9c^2+c^3)\epsilon$$

باتباع نفس الحسابات. يكفي أن نجد عدد حقيقي $c>0$ حيث $3c+9c^2+c^3\leq 1$. على سبيل المثال $c=1/100$. من أجل $\epsilon\in]0,1]$ نبرهن أنه إذا كان $\delta=\epsilon/100$ فإن

$$|x-1|\leq\delta\implies|x^3-1|\leq\epsilon.$$

هذا يثبت أن نهاية x^3 عند 1 تساوي 1.

تمرين 5 : لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln|x|} & \text{إذا كان } x\notin\{0,-1,1\}\\ 0 & \text{إذا كان } x=0,-1,1\end{cases}$$

في أي النقاط الدالة g تكون مستمرة؟

الحــل

الدالة g هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ باعتبارها مقلوب دالة مستمرة لا ينعدم مقامها. لندرس استمرارية الدالة g عند 0. لأن

$$\lim_{x\to 0}\ln|x|=-\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{X\to -\infty} \frac{1}{X} = 0 = g(0).$$

الدالة g مستمرة عند 0. ثم ولأن

$$\lim_{x\to 1^+} \ln|x| = 0^+$$

فإن

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \neq g(1).$$

الدالة g ليست مستمرة عند 1. بنفس الطريقة نبرهن أن g ليست مستمرة عند -1.

تمرين 6 : .

1) لتكن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{إذا كان } x \leq 1, \\ a\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{إذا كان } x > 1 \end{cases}$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي. ماهي قيم a حتى تكون الدالة f مستمرة؟

2) أوجد كل قيم الثابت $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ حتى تكون الدالة $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التالية مستمرة :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & \text{إذا كان } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{إذا كان } x \geq 1. \end{cases}$$

الحــل

(٠). الدالة مستمرة على المجال $]1; +\infty[$ وعلى $]-\infty; 1[$. لأن f مستمرة إذا وفقط إذا كان f يقبل نهاية من اليمين ومن اليسار عند 1 ت قُ س لِمِتس و يجب أن تتساوى النهايتية، لكن لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sin(\pi/2) = a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2.$$

الدالة f **مستمرة عند** 1 **إذا وفقط إذا كان** $a^2 = a$ **يعني إذا وفقط إذا كان** $a = 1$ **أو** $a = 0$.

(٠). **نفعل نفس الشيء، لكن هذه المرة علينا دراسة الاستمرارية على اليمين و على اليسار عند النقطتين** 0 **و** 1**، للدالة** g **من الواضح إستمرارها على المجال** $]-\infty; 0[$ **و المجال** $]0; 1[$ **وعلى** $]1; +\infty[$. **ولدينا من جهة:**

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \alpha + \beta.$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma(e^1 - e^{-1}) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = e^1.$$

الدالة g **مستمرة إذا وفقط إذا كانت الثلاثية** (α, β, γ) **تحقق الجملة التالية:**

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1. \end{cases}$$

لحل الجملة وعلى سبيل المثال نطرح $e^{-1}L_1$ **من** L_2. **نجد الجملة المكافئة :**

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ (e^1 - e^{-1})\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1 - e^{-1}. \end{cases}$$

نستطيع اختزال القيمة $e^1 - e^{-1}$ **من المعادلة الثانية فنجد:**

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \beta + \gamma &= 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \gamma \\ \beta &= 1 - \gamma \\ \gamma &= \gamma \end{cases}$$

مجموعة الثلاثيات التي من أجلها الدالة g **مستمرة هي:** $\{(0, 1, 0) + \gamma(1, -1, 1) : \gamma \in \mathbb{R}\}$.

تمرين 7 : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة -1.
حدد القيمة المأخوذة عند -1 لهذا التمديد.

الحـــل

ينعدم كل من البسط والمقام عند القيمة -1، لذلك لدينا حالة عدم تعيين عند حساب نهاية الدالة f عند -1. لإزالة عدم التعيين هذا، نبسط الكسر بإستخراج العامل المشترك، نجد:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

ومنه تصبح الدالة :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1/3$$

نستنتج أن الدالة قابلة للتمديد بالإستمرار والدالة الممددة تكتب على الشكل:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x^3+1} & \text{إذا كان} \quad x \neq -1, \\ 1/3 & \text{إذا كان} \quad x = -1. \end{cases}$$

تمرين 8 : هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق في 0 ؟

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{إذا كان} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان} \quad x = 0. \end{cases}, \qquad h(x) = |x|\sin x.$$

الحـــل

حسب التعريف نحسب نسبة التزايد للدالة ونبحث فيما إذا كانت تقبل نهاية عند القيمة 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x}{1+|x|}}{x}=\frac{1}{1+|x|}\to 1$$

عندما $x\to 0$. الدالة قابلة للإشتقاق عند 0 ومشتقها 1. بالنسبة للدالة g لدينا:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sin(x)\sin(1/x).$$

نستعمل $|\sin x|\leq |x|$ و $|\sin(1/x)|\leq 1$ نستنتج أن:

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right|\leq |x|.$$

بإستعمال نظرية المقارنة، نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0.

الدالة g قابلة للإشتقاق عند 0 مع $g'(0)=0$. من أجل h لدينا:

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=|x|\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

لأن $\sin x/x$ يؤول للـ 1 لما x يؤول إلى 0 و $|x|$ يؤول إلى 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه h قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $h'(0)=0$.

تمرين 9 : أوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{إذا كان} \quad 0\leq x\leq 1\\ ax^2+bx+1 & \text{إذا كان} \quad x>1\end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند 1.

الحــل

أولا، يجب أنتكون الدالة f مستمرة عند 1.

لدينا :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(\sqrt{x}\right)=1=\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=a+b+1.$$

ومنه:

$$a+b+1=1\Longrightarrow b=-a.$$

لندرس قابلية الإشتقاق عند 1.

الدالة f تتطابق مع الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال $[0,1]$.

مشتق الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هو $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$، f يقبل مشتق من يسار العدد 1 والذي قيمته $1/2$.

من جهة أخرى الدالة fتتطابق على المجال $]1,+\infty[$ مع الدالة $x \mapsto ax^2+bx+1$ ومنه مشتقها هو $x \mapsto 2ax+b$.

الدالة f إذا قابلة للإشتقاق عند 1، ومشتقها يساوي $2a+b$.

أخيرا، الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= f'_g(1) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'_d(1) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} = 2a+b \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

تمرين 10 : أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

الحـــل

نلاحظ أن f مستمرة عند 0، لأن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

من جهة أخرى الدالة f هي من الصنف C^1 سُر على $\mathbb{R}^*$.

لندرس قابلية الإشتقاق عند 0 وبالرجوع للتعريف ندرس نهاية نسبة التزايد :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0, x \to 0$$

بفضل خواص الدوال المثلثية في وجود حد علوي وسفلي نجد $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$.
وبالتالي الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0، مع $f'(0) = 0$. لكي نحدد ما إذا كانت الدالة f من الصنف C^1 عند 0، يجب دراسة استمرارية المشتق عند 0.
وعليه، من أجل $x \neq 0$ لدينا:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

نضع $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ومنه x_n يؤول إلى 0 و:

$$f'(x_n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

وبالتالي: f' ليس مستمر عند 0، أي أن الدالة f ليست من الصنف C^1.

بنفس الطريق نعامل الدالة g لكي نبرهن أنها من الصنف C^1 على $\mathbb{R}^*$ قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $g'(0) = 0$. إضافة على ذلك، من أجل $x \neq 0$:

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

حيث:

$$|g'(x) - g'(x)| \leq 3\,|x|^2 + |x|.$$

هذا يدل أن g' مستمر عند 0، ومنه g من الصنف C^1.

تمرين 11 : أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

$\mathbf{1}.x \mapsto x \exp(x)$ $\qquad$ $\mathbf{2}.x \mapsto x^2 \sin x$

$\mathbf{3}.x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$.

الحـــل

بإستعمال خواص الإشتقاق نجد:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \Longrightarrow f'(x) = e^x + xe^x. \\ g(x) &= x^2 \sin x \Longrightarrow g'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x. \\ h(x) &= x^{n-1} \ln(1+x) \Longrightarrow \\ h'(x) &= \frac{x^{n-2}}{x+1} \left(x - \ln(x+1) + n \ln(x+1) - x \ln(x+1) + nx \ln(x+1) \right). \end{aligned}$$

تمرين 12 : لتكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n+1$ للدالة $x^n e^{1/x}$ هو

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$

الحــل

الدالة من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^*$. لنثبت العلاقة المطلوبة بالتراجع على n.

لدينا، من أجل $n = 0$، مشتق الدالة $e^{1/x}$ هو $\frac{-1}{x^2} e^{1/x}$. ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n أي :

$$\left(x^{n-1} e^{1/x} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$. لهذا نكتب الدالة $x^n e^{1/x}$ على الشكل $x x^{n-1} e^{1/x}$ ثم نستعمل صيغة ليبنيز لكي نبرهن :

$$\left(x^n e^{1/x} \right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}$$

نجد:

$$\begin{aligned}
\left(x^{n}e^{1/x}\right)^{(n+1)} &= \left(x\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}C_n^k\cdot x^{(k)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-k)}\\
&= C_n^0\cdot x^{(0)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-0)}+C_n^1\cdot x^{(1)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-1)}\\
&= 1\cdot x\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}+(n+1)\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}\\
&= x\cdot\left(\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\right)'+(n+1)\cdot\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\\
&= x\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}e^{\frac{1}{x}}(x+nx+1)+(n+1)\cdot\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

تمرين 13 : التطبيق التالي هو متباين، غامر، تقابلي؟

$$\begin{aligned}
f\ :\ \mathbb{R}\ &\to\mathbb{R}\\
x\ &\to 2x+5
\end{aligned}$$

الحـــل

$$\begin{aligned}
f\ :\ \mathbb{R}\ &\to\mathbb{R}\\
x\ &\to\ 2x+5
\end{aligned}$$

- الدالة f متباينة لأن

$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow\ x=y$$

- f غامرة لأن

$$y=2x+5\quad\Rightarrow\quad x=\frac{y-5}{2}\in\mathbb{R}$$

- f تقابلية لأنها غامرة ومتباينة ولأنها تقبل حل وحيد $x\in\mathbb{R}$.

تمرين 14 : لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

1) أوجد مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$ للدالة f.

2) أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$, هل هي قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$?

الحـــل

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

- مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_f &= \{x\neq 0\},\\
\mathcal{D}_f &= \left\{1+x>0, 1+x^2>0\ \right\}\\
&\Longrightarrow \mathcal{D}_f=\{x>-1\}\\
&\Longrightarrow \mathcal{D}_f=\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[.
\end{aligned}$$

- لحساب النهاية نضرب في المرافق ونبسط الكسر

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}*\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}\\
&= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}\\
&= \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

f قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ والدالة الممددة هي :

$$\widetilde{f} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$