تمرين 12 : أوجد في كل حالة مجموعة تعريف الدالة ثم مشتقها:

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1,$

2) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x},$

3) $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x),$

4) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7},$

5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1},$

6) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{2}{3x},$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x+x^2},$

8) $f(x) = (2x+1)^2,$

9) $f(x) = \sqrt{x}(5x-3).$

الحــل

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 43x^2 - 52x + 1 \\ &= 12x^2 - 10x + 1 \end{aligned}$$

لكي تكون f معرفة يجب أن يكون $x \neq 0$ و $x \geq 0$. ومنه $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$. الدالة مقلوب قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$. بالإضافة أن الدالة الجذر التربيعي قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$. ومنه f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^2 - \frac{-1}{x^2} + 3\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\left(x^3-2x\right)+\left(x^2+1\right)\left(3x^2-2\right) \\ &= 2x^4-4x^2+3^x4-2x^2+3x^2-2 \\ &= 5x^4-3x^2-2 \end{aligned}$$

f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن $x^2+7>0$ من أجل كل x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x\left(x^2+7\right)-2x\left(2x^2-3\right)}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{4x^3+28x-4x^3+6x}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{34x}{\left(x^2+7\right)^2} \end{aligned}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1+\frac{2}{3}\frac{-1}{x^2} \\ &= -1-\frac{2}{3x^2} \end{aligned}$$

تكون الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق إذا كان $x+x^2\neq 0$. أي $x+x^2=x(x+1)$. ومنه f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$$f'(x)=-\frac{1+2x}{\left(x+x^2\right)^2}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. $f(x)=(2x+1)(2x+1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2x+1)+(2x+1)2 \\ &= 4(2x+1) \\ &= 8x+4 \end{aligned}$$

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3)+5\sqrt{x} \\ &= \frac{5x-3+10x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{15x-3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

تمرين 13 : أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

$\mathbf{1}).x \mapsto xe^x$ $\qquad$ $\mathbf{2}).x \mapsto x^2 \sin x$

$\mathbf{3}).x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x).$

الحـــل

باستعمال خواص الإشتقاق نجد:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \Longrightarrow f'(x) = e^x + xe^x. \\ g(x) &= x^2 \sin x \Longrightarrow g'(x) = x^2\cos x + 2x\sin x. \\ h(x) &= x^{n-1}\ln(1+x) \Longrightarrow \\ h'(x) &= \frac{x^{n-2}}{x+1}\left(x - \ln(x+1) + n\ln(x+1) - x\ln(x+1) + nx\ln(x+1)\right). \end{aligned}$$

تمرين 14 : لتكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n+1$ للدالة $x^n e^{1/x}$ هو

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

الحـــل

الدالة من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^*$. لنثبت العلاقة المطلوبة بالتراجع على n.

لدينا، من أجل $n=0$، مشتق الدالة $e^{1/x}$ هو $\frac{-1}{x^2}e^{1/x}$. ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n أي :

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$. لهذا نكتب الدالة $x^n e^{1/x}$ على الشكل $x \cdot x^{n-1} e^{1/x}$ ثم نستعمل صيغة ليبنيز لكي نبرهن :

$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}$$

نجد:

$$\begin{aligned}
\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} &= \left(x\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k \cdot x^{(k)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-k)} \\
&= C_n^0 \cdot x^{(0)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-0)} + C_n^1 \cdot x^{(1)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-1)} \\
&= 1 \cdot x \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} + (n+1) \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} \\
&= x \cdot \left(\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\right)' + (n+1) \cdot \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} \\
&= x \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}} e^{\frac{1}{x}} (x + nx + 1) + (n+1) \cdot \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

تمرين 15 : أوجد النشر المحدود في النقطة a من الرتبة n للدوال التالية:

$$\begin{array}{lll}
1) & \ln\cos x & n=6, \quad a=0. \\
2) & \dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x} & n=2, \quad a=0. \\
3) & \ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) & n=3, \quad a=0. \\
4) & \ln(\sin x) & n=3, \quad a=\frac{\pi}{4}. \\
5) & (1+x)^{\frac{1}{x}} & n=3, \quad a=0.
\end{array}$$

الحــل

- $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
- $\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
- $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
- $\ln(\sin x) = \ln(1/2\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

- $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\, ex + \frac{11}{24}\, ex^2 - \frac{7}{16}\, ex^3 + o\left(x^3\right)$.

تمرين 16 : أوجد النشر المحدود للدالة $h(x) = \cos\left(\ln(1+x)\right)$ عند 0 من الرتبة 3.

الحــل

- نضع $f(u) = \cos(u)$ و $g(x) = \ln(1+x)$ ومنه:

$$f \circ g(x) = \cos\left(\ln(1+x)\right) \quad \text{و} \quad g(0) = 0$$

.

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

$$f(u) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2:

$$u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$

.

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) = f(u) \\ &= 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= 1 - \frac{x^2 - x^3}{2!} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

القسم ب

الجزء الثاني : الجبـــــر 1