Solution de Série 1 - Math 1

EXO1 : trivial #

EXO2 : On a : $A = \{4, 7, 8, 10\}$.

① $P(x) \equiv \exists x \in A, x \leq 5$

On a : $x = 4 \in A$ tq : $4 \leq 5$ donc $P(x)$ vraie

② $P(x) \equiv \forall x \in A$ tq : $x + 1 \geq 5$

On a : $x = 4 \Rightarrow x+1 = 5$. donc $P(x)$ vraie.

$x = 7 \Rightarrow 8 \geq 5 \Rightarrow P(x)$ est V.

: $x = 8 \Rightarrow 9 \geq 5 \Rightarrow P(x)$ " .

: $x = 10 \Rightarrow 11 \geq 5 \Rightarrow P(x)$ " .

On trouve que : $P(x)$ est vraie pour tout $x \in A$.

#

EXO3 : ① $\forall n \in \mathbb{N}^*$: n^2 est pair $\Leftrightarrow$ n est pair.

On va montrer : ① n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair.

Par contraposition : n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair :

* Si n est impair donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tq : $n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 2(2k^2+2k) + 1$

donc $n^2 = 2k' + 1$ tq : $k' = 2k^2 + 2k$

donc : n^2 est impair.

n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair (Raisonnement directe)

Si : n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$: $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k'$, $k' = 2k$. donc : n^2 est pair #

② Soit : $a, b \in \mathbb{R}^+$, on va montrer :

① $a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2}$

On a : $a \leq b \Rightarrow a + a \leq a + b \Rightarrow 2a \leq a + b$

$\Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2}$

② $a \leq b \Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \Rightarrow a^2 \leq ab \Rightarrow a \leq \sqrt{ab}$.

#

EXO 4 : Les assertions suivantes sont fausse.

① $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x + 1 = 0 \wedge x + 2 = 0)$

fausse , car x ne peut pas avoir la même valeur au même temps ($x = -1$ et $x = -2$)

#

② $(\forall x \in \mathbb{R},\ x < 2 \Rightarrow x^2 < 4) \equiv Q(x)$

Soit : $x = -3$, on a : $-3 < 2$ mais $(-3)^2 = 9 > 4$

donc : $Q(x)$ est fausse.

③ $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \equiv r(x)$

Soit $x = -1$ donc $-1 + \frac{1}{-1} = -2 < 2$

donc : $r(x)$ est fausse.

EXO5 : Par l'absurde.

① $(\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1} > n) \equiv P(n)$

On suppose : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq : $\sqrt{n_0^2+1} \leq n_0$.

$\Rightarrow n_0^2 + 1 \leq n_0^2 \Rightarrow 1 \leq 0$ contradiction

~~donc $P(n)$~~

② $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on suppose que : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ donc :

$\exists p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et p, q sont premier entre eux

tq : $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \boxed{p^2 = 2q^2}$ ...① $\Rightarrow$

p^2 est pair $\Rightarrow p$ est pair ie : p est divisable par 2.

donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ tq : $p = 2k$, donc, on trouve : ① $\Rightarrow$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow q$ est pair.

donc : q est divisable par 2 . contradiction, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ #

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$. On suppose que :

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq : $\sqrt{n^2+n} \in \mathbb{N}$ donc $\exists k \in \mathbb{N}$

tq : $\sqrt{n^2+n} = k \Rightarrow n^2+n = k^2$.

On a : $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n > 0 \Rightarrow 2n+1 > n > 0$.

$\Rightarrow 0 < n < 2n+1 \Rightarrow n^2 < n^2+n < n^2+2n+1$

$\Rightarrow n^2 < n^2+n < (n+1)^2 . \Rightarrow n < \sqrt{n^2+n} < n+1$

$\Rightarrow n < k < n+1$ contradiction #.

(2)(1) Soit $n \in \mathbb{N}$: n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair

On va montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair (dans EXO 3)

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$: Si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\Rightarrow$

$\frac{a}{2}$ n'est pas pair .

On va montrer que : $\frac{a}{2}$ est pair $\Rightarrow a^2 = 16k', k' \in \mathbb{N}$.

On a : $\frac{a}{2}$ est pair donc : $\exists k \in \mathbb{N}$ tq : $\frac{a}{2} = 2k$

$\Rightarrow a = 4k \Rightarrow a^2 = 16k$ donc a^2 est

multiple de 16 #.

EXO 6 : ① On a : $P(n) \equiv \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

(Par récurrence) : On a :

① $P(0)$ est vraie car : $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 1$.

② On suppose que $P(n)$ est vraie on va montrer que $P(n+1)$ est vraie :

On a : $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1}$

$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$

$= 2^{n+2} - 1$

donc $P(n+1)$ est vraie. # (The same solution for other propositions)