Exo 1 : Le domaine de définition

① $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$; $x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$ et $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > -1$ et $x > 0$ et $\ln x \neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x > -1$ et $x > 0$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in]-1, \infty[$ et $x \in]0, \infty[$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. donc $D_f =]0,1[\cup]1,\infty[$

② $g(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$; $x \in D_g \Leftrightarrow \ln(x+2) \geq 0$ et $x+2 > 0$.

$\Leftrightarrow x+2 \geq 1$ et $x > -2$.

$\Leftrightarrow x \geq -1$ et $x > -2$. $\Leftrightarrow x \in [-1, \infty[$.

③ $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{|x-3|}$; $x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \geq 0$ et $|x-3| \neq 0$.

$\Leftrightarrow x \geq 1$ et $x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ et $x \neq +3$.

$\Leftrightarrow x \in [1, \infty[$ et $x \neq 3$.

$\Leftrightarrow x \in [1, 3[\cup]3, \infty[$

④ $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-4}$; $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 1] \cup]2, +\infty[$.

Exo 4 : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

① $x \in D_f \iff x^2+3x+2 \neq 0 \iff x \neq -1$ et $x \neq -2$.

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$.

② $\lim\limits_{x \mapsto -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x \mapsto -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+2)}$

$= 3$.

* $-1 \notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0 = -1$.

③ on a : $-2 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \mapsto -2} f(x) = \dfrac{-7}{0} = \infty$

Donc on ~~pe~~ ne peut prolonger f par continuité #

Exo 5 : on a : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

donc : ① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x+2} - e^2}{x}$; on pose : $f(x) = e^{3x+2}$ alors :

$f(0) = e^2$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = (3x+2)' e^2$

$= 3e^2$ #

② $g(x) = \cos(x)$, $g'(0) = 0$ puisque : $g'(x) = -\sin x$

③ $h(x) = \ln(2-x)$, $h'(x) = \frac{-1}{2-x}$, $h'(1) = -1$

Exo 7 : ① Si $x \neq 0$, f est continue :

* $\lim\limits_{x \overset{<}{\mapsto} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\mapsto} 0} ax+b = b = f(0)$

* $\lim\limits_{x \overset{>}{\mapsto} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\mapsto} 0} \frac{1}{1+x} = 1$

Donc : f est continue si seulement si $\boxed{b = 1}$

② Si $x \neq 0$ alors f est dérivable.

si $x < 0$ alors : $f'(x) = a$ et si $x > 0$: $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

On a : $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\mapsto} 0} \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\mapsto} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\mapsto} 0} f'(x) \Leftrightarrow \boxed{-1 = a}$

Si $b = 1$ et $a = -1$ alors : f est continue sur $x = 0$

Donc : f est dérivable en 0. donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ #

EXO2:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = \dfrac{0}{0}$ C.I.D.

Pour élliminer le C.I.N nous devons d'abord réecrire la limite sans valeur absolue ainsi on aura:

$\lim\limits_{x\geq 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = \lim\limits_{x\geq 0} \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\geq 0} \dfrac{x(x+2)}{\cancel{x}} = 2.$

$\lim\limits_{x\leq 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = \lim\limits_{x\leq 0} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\leq 0} \dfrac{x(x-2)}{\cancel{x}} = -2.$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ C.I.D. on a $\begin{cases} x^2-4 = (x-2)(x+2) \\ \text{et} \\ x^2-3x+2 = (x-2)(x-1). \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{(x-1)} = 4$

ⓒ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^{1/2}-1}{(1+x)^{1/3}-1} = \dfrac{0}{0}$

Pour calculé cette limite nous pouvons utiliser le changement de variable suivant:

$y^6 = x+1$ (6 est le plus petit multiplicateur de 2 et 3)

on remarque que lorsque $x\to 0 \Rightarrow y\to 1$. donc

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/2}-1}{(1+x)^{1/3}-1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{(y^6)^{1/2}-1}{(y^6)^{1/3}-1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^3-1}{y^2-1} = \dfrac{0}{0}$ C.I.N.

$\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^3-1}{y^2-1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}{\cancel{(y-1)}(y+1)} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^2+y+1}{y+1} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \dfrac{3}{2}$.

ⓓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{x^4-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

ⓔ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x} = \dfrac{0}{0}$ C.I.D.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x^2})^2}{x\left[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1+x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

<u>EXO3 :</u> Rappellons que ① f est continue au pt x_0 ssi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ou encore :}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

② f est continue en tout point interieur de son domaine de définition.

ⓐ $f(x) = \begin{cases} \ln(e^2+x); & x>0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(e^2+x) & x>0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ x+2 & \text{si } x<0 \end{cases}$

d'après le pts ② si f n'est pas continue ce sera au pt $x_0 = 0$.

On a :

$f(0) = 2$ ———— (*)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x+2 = 2 \quad \text{——} (**)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \ln(e^2+x) = 2 \quad \text{——} (***)$$

de $(*)$, $(**)$ et $(***)$ on déduit que f est contine au pts $x_0=0$ par conséquence f est contine sur $\mathbb{R}$.

ⓑ $g(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \sin(x) & \text{si } 0<x<\pi \\ 0 & \text{si } x=\pi \\ 1+\cos(x) & \text{si } x>\pi \end{cases}$

Pour conclure sur la continuité de g en tout pt on doit de $\mathbb{R}$ verifier sa contuité au pts $x_0=0$ et $x_0=\pi$.

on a: $g(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x^2+x = 0 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ est contine au pts } x_0=0 \quad (*)$$

on a: $g(\pi)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \overset{<}{\to} \pi} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \pi} \sin(x) = 0 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} \pi} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} \pi} 1+\cos(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ est contine au pt } x_0=\pi \quad (**)$$

de $(*)$ et $(**)$ on conclue que g est contine sur $\mathbb{R}$.

ⓒ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}; & \text{si } x>5 \\ 7 & \text{si } x=5 \\ x+2 & \text{si } \cancel{x}>5. \end{cases}$

On a :

$h(5) = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 5} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{0}{0}.$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 5} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 5} \frac{\cancel{x-5}}{(\cancel{x-5})(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

on remarque que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 5} h(x) \neq h(5)$

donc à ce niveau on peut déduire que :

$h(x)$ n'est pas continue au pt $x_0 = 5$ sans calculer :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 5} h(x)$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 5} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 5} x+2 = 7 = h(5). \Rightarrow$$

on conclue que h est continue à gauche de $x_0 = 5$ mais pas à droite

<u>Conclusion :</u>

h est continue sur $\mathbb{R} / \{5\}$.

EXO6: Rappellons que

① f est derivable en tout pt interieur de son domaine de définition.

② f est dérivable au pt x_0 ssi

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell.$$

ⓐ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1-e^x & \text{si } x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{0}{0}$$

on utilise la Régle d'Hopital pour elliminer C.I.D :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-e^x}{1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{e^x-1}{e^x+1}-0}{x-0} = \cancel{\frac{0}{0}} \quad \frac{0}{0}.$$

utilisant la Régle d'Hopital.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x-1}{x(e^x+1)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x}{(e^x+1)+xe^x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

on remarque que $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable au pt $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ f est derivable sur $\mathbb{R} / \{0\}$.

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{1/x} - 0}{x - 0} = \cancel{+}\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\cancel{x}(\ln(x) - 1) - 0}{\cancel{x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) - 1 = -\infty$$

Malgré que $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ la f^{ct} $g(x)$ n'est pas dérivable au pt $x_0 = 0$ car la limite n'est pas fini.

On conclut que g est dérivable sur $\mathbb{R} / \{0\}$.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ C.I.!}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2})}{x^2(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{2} - \cancel{2}}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ (de la même manière que dans le cas $x \overset{<}{\to} 0$)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$ $\Rightarrow$ h est dérivable au point $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.