سلسلة التمارين الأولى

تمرين 1 :

لتكن القضايا التالية : p, q و r. باستخدام جدول الحقيقة، أثبت مايلي:

1. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$.
2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
3. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$.

تمرين 2 :

لتكن $A = \{4, 7, 8, 10\}$ ولتكن :

1. $p(x)$ تمثل: يوجد $x \in A$ بحيث $x \leq 5$.
2. $p(x)$ تمثل: لكل $x \in A$ بحيث $x + 1 \geq 5$.

بيـن صحة هته القضايا.

تمرين 3 :

أثبت صحة القضايا الآتية:

1. $\forall n \in N^*$ ، n^2 زوجي $\Leftrightarrow n$ زوجي .
2. لتكن $a, b \in R^+$:

$$a \leq b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2}.$$
$$a \leq b \Rightarrow a \leq \sqrt{a \times b}.$$

تمرين 4 :

أثبت خطأ القضايا التالية :

1. $\exists x \in R, \ (x + 1 = 0 \wedge x + 2 = 0)$.
2. من أجل كل $x \in R$ فإن $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$.
3. $\forall x \in R^* : \ x + \frac{1}{x} \geq 2$.

تمرين 5 :

أثبت مايلي :

1. (باستعمال البرهان بالخلف)

(ا) $\forall n \in N,\ \sqrt{n^2+1} > n$.

(ب) $\sqrt{2} \notin Q$.

(ج) $\forall n \in N^*,\ \sqrt{n^2+n} \notin N$.

2. (باستعمال العكس النقيض)

(ا) $n \in N$: فردي $n^2 \Rightarrow n$ فردي .

(ب) لتكن $a \in R$ إذا كانت a^2 ليس مضاعف لـ 16 $\Leftarrow$ $\frac{a}{2}$ ليس عدد زوجي .

تمرين 6 :

برهن بالتراجع مايلي:

1. $\forall n \in N,\ \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

2. $\forall n \in N^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. $\forall n \in N^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. ليكن $u_0 = 2$ و $u_1 = 3$، و ليكن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$u_n = 1 + 2^n.$$

سلسلة التمارين الثانية

تمرين 1 :

لتكن $A, B, C \in \mathbf{P(E)}$. أعط كتابة مبسطة للمجموعات الجزئية التالية:

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$
2. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
3. $(A \cup B)^c \cap (C \cup A^c)$
4. $[(A \cup B) \cap (B \cap C)] \cup (A \cup C)$
5. $(A \cup B) \cap [(B \cap C) \cup (A \cup C)]$

تمرين 2 :

لتكن $A, B, C \in \mathbf{P(E)}$. بين مايلي:

1. $[A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C] \Rightarrow B \subset C$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
5. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

تمرين 3 :

لتكن $A, B \in \mathbf{P(E)}$. بين مايلي :

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

تمرين 4 :

نعرف العلاقة $\Re$ على $\mathbf{Z}^2$ كما يلي:

$$(x, y) \, \Re \, (x', y') \Leftrightarrow x \times y = x' \times y'$$

1. بين أنها علاقة تكافؤ
2. أعط صنف تكافؤ $(0,0)$ و $(1,1)$.

تمرين 5 :

نعرف على $\mathbf{N}^*$ العلاقة $\Re$ المعرفة كما يلي:

$$x \Re y \Leftrightarrow x \text{ يقسم } y$$

- بين أن $\Re$ علاقة ترتيب جزئي.

تمرين 6 :

ليكن $n \geq 2$ نعرف العلاقة $\Re$ على $\mathbf{Z}$ كما يلي:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b) \text{ : مضاعف لـ } n$$

1. بين أنها علاقة تكافؤ
2. أعط أصناف تكافؤ $0, 1$ و n
3. أعط مجموعة أصناف التكافؤ

تمرين 7 :

هل التطبيقات الآتية: غامرة ، متباينة أو تقابلية؟ مع التعليل

1.
$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} g \;:\; & \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} h \;:\; & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x + x^3 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} k \;:\; & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x^2 + x^3 \end{aligned}$$

تمرين 8 :

لتكن E, F, G ثلاث مجموعات بحيث : $f : E \to F$ تطبيق و $g : F \to G$ تطبيق . بين الخواص التالية:

1. إذا كان $g \circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين
2. إذا كان $g \circ f$ غامر $\Leftarrow$ g غامر

تمرين 9 :

لتكن E, F مجموعتين غير خاليتين بحيث: $f : E \to F$ ولتكن A, B مجموعتين غير خاليتين من E و C, D مجموعتين غير خاليتين من F. بين أن :

1. إذا كان $A \subset B$ $\Leftarrow$ $f(A) \subset f(B)$
2. $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$
3. $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$
4. $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$

سلسلة التمارين الرابعة

تمرين 1 :

أحسب مايلي:

$$\cos\frac{\pi}{12};\qquad \sin\frac{\pi}{12},\ (exo);\qquad \cos\frac{\pi}{8};\qquad \sin\frac{\pi}{8},\ (exo);\qquad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2},\ (exo);\qquad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تمرين 2 :

أحسب النهايات التالية:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{1-e^x}$$
2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x};\ (exo)$$
3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{\ln(1+x)}$$
4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)-\arcsin x}{x};\ (exo)$$

تمرين 3 :

- أثبت أن:

1. الدالة $\arctan(\mathbf{x})$ هي دالة متزايدة تماما مهما يكن x عدد حقيقي.
2. $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
3. من أجل كل عدد حقيقي a, $a\in\mathbf{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ بحيث: $\sin(2a)=\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2 a}$

- استنتج مايلي: $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

تمرين 4 :

بسط العبارات التالية:

1. $$\ln(\cosh x+\sinh x)+\ln(\cosh x-\sinh x)$$
2. $$\frac{\cosh(\ln x)+\sinh(\ln x)}{x}$$
3. $$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$$
4. $$2\sinh x\cosh x;\ (exo)$$
5. $$\cosh^2 x+\sinh^2 x;\ (exo)$$

تمرين 5 :

لتكن الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln(x+1)}$$

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. أوجد نهاية الدالة عند $x_0 = 0$
3. أوجد صيغة ماك لوران لـ: $\sin x$ و $\ln(x+1)$ من الرتبة 2.
4. أوجد النشر المحدود للدالة f جوار الصفر من الرتبة 1 ثم أحسب: $f(0.02)$.

تمرين 6 :

أوجد النشر المحدود للدوال التالية:

1. $$f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2),\ x_0 = 0,\ n = 7$$
2. $$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2},\ x_0 = 0,\ n = 4;\ (exo)$$
3. $$f(x) = x^2 \ln(x),\ x_0 = 1,\ n = 5$$
4. $$f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3},\ n = 3;\ (exo)$$
5. $$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}},\ in\ +\infty,\ n = 3$$
6. $$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2x},\ in\ +\infty,\ n = 3;\ (exo)$$

تمرين 7 :

أحسب النهايات التالية باستخدام النشر المحدود

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
2. $$\lim_{x\to 2} \frac{e^{2x}\sin(3x)}{\sinh(-2x)};\ (exo)$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x};\ (exo)$$

سلسلة التمارين الثالثة

تمرين 1 :

عين مجموعة تعريف الدوال الآتية:

1. $$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$
2. $$g(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$$
3. $$h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|x-3|}$$
4. $$k(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-4}$$

تمرين 2 :

أحسب النهاية إن وجدت في كل حالة من الحالات الآتية:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$$
2. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$
4. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^4-2}$$
5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

تمرين 3 :

أدرس استمرارية الدوال التالية:

1. $$f(x) = \begin{cases} ln(e^2+x) & ,x>0 \\ x+2 & ,x\le 0 \end{cases}$$
2. $$g(x) = \begin{cases} x^2+x & ,x\le 0 \\ \sin(x) & ,0<x\le \pi \\ 1+\cos(x) & ,x>\pi \end{cases}$$
3. $$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} & ,x>5 \\ x+2 & ,x\le 5 \end{cases}$$

تمرين 4 :

لتكن الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$$

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. أوجد نهاية الدالة عند $x_0 = -1$ ، هل الدالة مستمرة عندها؟
3. هل تقبل الدالة f التمديد عند النقطة $x_0 = -2$؟

تمرين 5 :

باستخدام تعريف العدد المشتق، أوجد النهايات التالية:

1. $$\lim_{x\to o} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}$$
2. $$\lim_{x\to o} \frac{\cos(x)-1}{x}$$
3. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

تمرين 6 :

هل تقبل الدوال التالية الاشتقاق

1. $$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{e^x+1} & ,x>0 \\ 1-e^x & ,x\leq 0 \end{cases}$$
2. $$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ x\ln(x)-x & ,x>0 \end{cases}$$
3. $$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

تمرين 7 :

لتكن a و b عددين حقيقيين، لنعرف الدالة $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ب

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & ,x\leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & ,x>0 \end{cases}$$

1. أعط شرط للقيمة b بحيث f تكون مستمرة على $\mathbf{R}$
2. أوجد a و b بحيث f تكون قابلة للاشتقاق على $\mathbf{R}$ وأوجد $f'(0)$.