الفصل الثالث

الفضاءات الشعاعية

فهرس الفصل

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات، كما يُعد تكملة للدرس السابق المجموعات.

1.3 البنى الجبرية

1.1.3 العملية الداخلية

تعريف 1.1.3 : لتكن E مجموعة بحيث $E \neq \emptyset$.
نسمي قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية (*Loi de composition interne*) كل تطبيق معرف على $E \times E$ ويأخذ قيمه في E.
ونرمز له عادة بـالرموز: $\star$ ، Δ، $\perp$ . . . فنكتب مثلا:

$$\boxed{\star : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x,y) \to x \star y \end{array}}$$

وتكون العملية $\star$ داخلية في E إذا تحقق ما يلي:

$$\boxed{\forall x, y \in E : x \star y \in E}$$

أي أن نقول إن العملية الداخلية $\star$ مستقرة في E.

مثال 1 : لتكن المجموعة $E = \{0, 1, 6, 9, 8\}$ ومنه $+$ ليست عملية داخلية في E. لأن $9 + 8 = 17 \notin E$

مثال 2 : $+$ عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

2.1.3 الزمرة

تعتبر الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية والمهمة في الجبر المجرد لكونها ضرورية من أجل فهم واستيعاب البنى الجبرية المجردة الأخرى: كالحلقات والحقول والفضاءات وتستخدم

نظرية الزمر في تصنيف جمل النقاط منتظمة المواقع في الفضاء وتعتبر هذه المسألة من أبرز المسائل المهمة في علم البلورات إضافة إلى دورها الفعال في استكشاف قانون الربط بين جزيء المادة وزمرة معينة. وفي الوقت الحاضر يصعب علينا تصور أي تطور لبنية نظرية الجزيئات دون مساعدة نظرية الزمر.

تعريف 2.1.3 : نقول أن $(G,\star)$ تشكل زمرة *Groupe* حيث G مجموعة مزودة بعملية داخلية $\star$ إذا تحققت الشروط الأربعة التالية:

1) $\star$ قانون داخلي

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y \in G.$$

2) $\star$ قانون تجميعي

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

3) $\star$ قانون يقبل عنصر حيادي وحيد

$$\exists! e \in G, \quad \forall x \in G, x \star e = x \quad \text{و} \quad e \star x = x,$$

4) لكل عنصر من G نظير بالنسبة للعملية $\star$

$$\forall x \in G, \quad \exists x' \in G: \quad x \star x' = x' \star x = e.$$

x' يسمى بمقلوب x ويرمز له بالرمز x^{-1}.

إذا أضفنا الشرط

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y = y \star x$$

نقول أن $(G,\star)$ تشكل زمرة تبديلية

مثال 3 : المجموعة $(\mathbb{R},+)$ تشكل زمرة تبديلية

مثال 4 : لتكن المجموعة $E \neq \emptyset$ و $\mathscr{L}(E)$ مجموعة التطبيقات التقابلية المزودة بعملية التركيب

$$\circ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (f,g) \to f \circ g \end{array}$$

المجموعة $(E,\circ)$ تشكل زمرة ليست تبديلية

لتكن $(G,\star)$ زمرة.

تعريف 3.1.3 : لتكن $H \subset G$ زمرة جزئية من G إذا كان :

- $e \in H$
- من أجل كل $x,y \in H$ فإن $x \star y \in H$.
- من أجل كل $x \in H$ فإن $x^{-1} \in H$.

3.1.3 الحلقة

تعريف 4.1.3 : نقول أن $(A,\Delta,\star)$ المزودة بالعمليتين الداخليتين $\star$ و Δ أنها تشكل حلقة إذا تحققت ما يلي:

1) $(A,\star)$ زمرة تبديلية

2) Δ تجميعية

$$\forall x,y,z \in A : \quad (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z).$$

3) $\star$ توزيعية على Δ

$$\forall x,y,z \in A : \quad x \star (y\Delta z) = (x\star y)\Delta(x \star z).$$

إذا تحقق الشرط

$$\exists! e \in A : \quad \forall x \in A, x\Delta e = e\Delta x = x.$$

نقول أن الحلقة $(A,\Delta,\star)$ حلقة واحدية.

إذا تحقق الشرط

$$\forall x,y \in A : \quad x\Delta y = y\Delta x.$$

نقول أن الحلقة $(A,\Delta,\star)$ حلقة تبديلية.

مثال 5 : المجموعة $(\mathbb{R},+,\times)$ تشكل حلقة تبديلية واحدية.

4.1.3 الجسم أو الحقل

تعريف 5.1.3 : نقول أن المجموعة $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}\neq\phi$ أنها جسم أو حقل المزودة بالعمليتين الداخليتين $\star$ و Δ إذا تحققت ما يلي:

1) $(\mathbb{K},\star,\Delta)$ حلقة

2) $(\mathbb{K}_{-\{e\}},\Delta)$ **زمرة**، حيث $\{e\}$هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية Δ

إذا تحقق الشرط

$$\forall x,y\in\mathbb{K}:\quad x\Delta y=y\Delta x.$$

نقول أن الجسم $(\mathbb{K},\star,\Delta)$ تبديلي.

مثال 6 : المجموعة $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ تشكل جسم تبديلي.

2.3 الفضاء الشعاعي

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات... الخ، كما أنه يُعد تكملة لدروس الفصول الماضية مثل فصل المجموعات والبُنى الجبرية...

تعريف 1.2.3 : نقول أن المجموعة $E\neq\emptyset$ أنها فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ إذا كانت مزودة بمايلي:

- قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية أي التطبيق المعرف من $E\times E$ نحو E حيث:

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- قانون تركيب خارجي أو عملية خارجية أي التطبيق المعرف من $\mathbb{K}\times E$ نحو E حيث:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

الذي يحقق الشروط التالية:

1) من أجل كل $u, v \in E$

$$u + v = v + u$$

2) من أجل كل $u, v, w \in E$

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

3) يوجد عنصر حيادي $0_E \in E$ حيث من أجل كل $u \in E$

$$u + 0_E = u$$

4) كل عنصر $u \in E$ يقبل عنصر نظير u' حيث

$$u + u' = 0_E.$$

نرمز للنظير u' بالرمز $-u$.

5) من أجل كل $u \in E$

$$1 \cdot u = u$$

6) من أجل كل $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ و $u \in E$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$$

7) من أجل كل $\lambda \in \mathbb{K}$ و $u, v \in E$

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

8) من أجل كل $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ و $u \in E$

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$

ملاحظة 1 : في ما بعد، و حتى نهاية الفصل:
- كل حقل نصادفه هو حقل تبديلي.
- عناصر الفضاء الشعاعي تسمى أشعة وعناصر الحقل تسمى سلميات.
- كل فضاء شعاعي يشتمل على الاقل على الشعاع المعدوم و ومنه من غير الممكن ان يكون خاليا.
- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي حقيقي (على حقل الأعداد الحقيقية).
- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي تخيلي (على حقل الأعداد التخيلية).

مثال 1 : ليكن $\mathbb{R}^2$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، أي : نضع $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^2$. ومنه كل عنصر $u\in E$ هو الزوج (x,y) حيث x عنصر من $\mathbb{R}$ و y عنصر من $\mathbb{R}$. ونكتب

$$\mathbb{R}^2=\big\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\big\}.$$

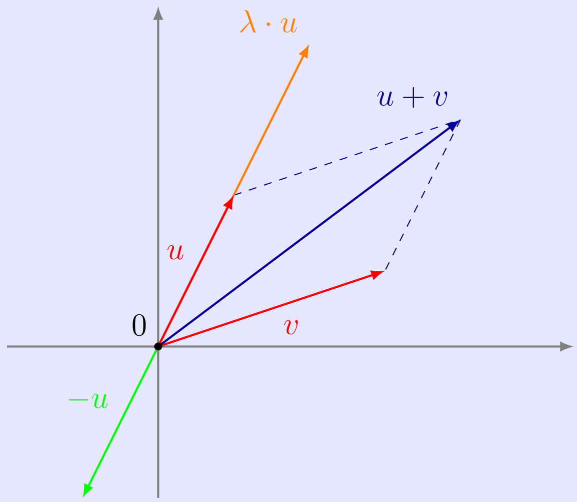
- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الداخلي $(+)$
  ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من $\mathbb{R}^2$ ومنه:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y').$$

- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الخارجي $(\cdot)$
  ليكن (x,y) عنصر من $\mathbb{R}^2$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

$$\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,\lambda y).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0,0)$. والعنصر النظير لكل عنصر (x,y) هو العنصر $(-x,-y)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x,y)$.



مثال 2 : ليكن $\mathbb{R}^n$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن n عدد طبيعي أكبر من 1. نضع $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^n$.
كل عنصر $u \in E$ هو إذا الشعاع $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر من $\mathbb{R}$. ونكتب

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ...\}.$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الداخلي $(+)$
ليكن $(x_1, \dots, x_n)$ و $(x'_1, \dots, x'_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$ ومنه:

$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n).$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الخارجي $(\cdot)$
ليكن $(x_1, \dots, x_n)$ عنصر من $\mathbb{R}^n$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0, 0, \dots, 0)$. والعنصر النظير لكل عنصر $(x_1, \dots, x_n)$ هو العنصر $(-x_1, \dots, -x_n)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x_1, \dots, x_n)$.

بنفس المنوال يمكن إنشاء الفضاء $\mathbb{C}$ و $\mathbb{C}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

مثال 3 : الفضاء الشعاعي للدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
لتكن $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. نزودها ببنية الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}$ كما يلي:

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الداخلي $(+)$
لتكن f و g عنصرين من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ومنه $f+g$ معرف كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الخارجي$(\cdot)$
لتكن f دالة من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه نعرف جداء دالة بسلمي كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

أو بكل بساطة نكتب

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- نعرف العنصر الحيادي بالنسبة للجمع بأنه الدالة المعدومة المعرفة كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

يمكن أن نرمز لها بالرمز $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

- العنصر النظير للدالة f من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هو الدالة g المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -f(x).$$

نرمز لنظير f بالنسبة للجمع بالرمز $-f$.

1.2.3 جداء الفضاءات الشعاعية

تعريف 2.2.3 : ليكن $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا وليكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فضاءات شعاعية على الحقل $\mathbb{K}$.

نعرف على $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ العمليتين الداخليتين $(+)$ و $(\cdot)$ كما يلي:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E :$$
$$1)\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$2)\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n).$$

عندئذ $(E, +, \cdot)$ يمثل فضاء شعاعي يسمى فضاء الجداء. يكون العنصر الحيادي في هذا الفضاء هو شعاع العناصر الحيادية لكل فضاء ونكتب:

$$0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_n}).$$

2.2.3 الحساب في الفضاءات الشعاعية

قضية 1 : ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. وليكن $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$. ومنه لدينا:

1) $0 \cdot u = 0_E$

2) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

3) $(-1) \cdot u = -u$

4) $\lambda = 0 \iff \lambda \cdot u = 0_E$ حيث $u = 0_E$

5) $\lambda \cdot u = 0_E \Longrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}}) \vee (u = 0_E)$

6) العملية التي ترفق بـ (u, v) الصورة $u + (-v)$ تسمى الطرح، ويرمز للشعاع $u + (-v)$ بالرمز $u - v$. ومنه لدينا الخواص التالية:

$$(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u \quad \text{و} \quad \lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$$

3.2.3 الفضاءات الشعاعية الجزئية

لتكن الثلاثية $(E, \Delta, \star)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

تعريف 3.2.3 : نقول عن الجزء غير الخال F من E إنه فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق الشرطان:

1) (F,Δ) زمرة جزئية من الزمرة التبديلية (E,Δ).

2) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in F:\quad \lambda\cdot x\in F$.

أو يمكننا استعمال التعريف التالي:

تعريف 4.2.3 : لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.
نقول عن F أنها فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق ما يلي:

1) $0_E\in F$

2) من أجل كل $u,v\in F$ لدينا $u+v\in F$

3) من أجل كل $\lambda\in\mathbb{K}$ و كلّا $u\in F$ لدينا $\lambda\cdot u\in F$

مثال 4 : ـ من أجل كل فضاء شعاعي E، فإن $\{0_E\}$ هو دوما فضاء شعاعي جزئي من E.

ـ مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية التي درجاتها أقل أو تساوي n، $\mathscr{P}_n[x]$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$. ولدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن: $\mathscr{P}_m[x]$ هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathscr{P}_n[x]$ حيث $n<m$.

نتيجة 1.2.3 : لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.
لكي يكون F فضاء شعاعي جزئي من E يكفي أن يتحقق الشرط التالي:

$$\boxed{\forall x,y\in F,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}:\lambda x+\mu y\in F.}$$

ملاحظة 2 : • كل فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على حقل تبديلي، هو أيضا فضاء شعاعي على نفس الحقل.

- كل فضاء شعاعي على حقل تبديلي ما، هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من نفسه على نفس الحقل.

4.2.3 المزج الخطية

تعريف 5.2.3 : نفترض أن $n \geq 1$ عدد صحيح، ولتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ، n شعاع من E.
أي: الشعاع من الشكل

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ سلميات من الحقل $\mathbb{K}$) يسمى مزج خطي للأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ تسمى معاملات المزج الخطي.

ملاحظة 3 : إذا كان $n = 1$، ومنه $u = \lambda_1 v_1$ و نقول أن u على علاقة خطية مع v_1.

مثال 5 : 1) في الفضاء $\mathbb{R}^3$، الشعاع $(3, 3, 1)$ هي مزج خطي للشعاعين $(1, 1, 0)$ و $(1, 1, 1)$ لأن:

$$(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1).$$

2) في الفضاء $\mathbb{R}^2$، الشعاع $u = (2, 1)$ ليس مرتبط خطيا مع الشعاع $v_1 = (1, 1)$ لأنه لا يوجد λ حقيقي حتى يكون $u = \lambda v_1$ الذي يكافئ $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$.

3) ليكن $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، ولتكن f_0، f_1، f_2 و f_3 دوال معرفة بمايلي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3.$$

ومنه الدالة f المعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

هي مزج خطي للدوال f_0, f_1, f_2, f_3 لأن

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

4) في فضاء المصفوفات $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

نستطيع كتابة A على شكل مزج خطي لمصفوفات تحتوي على أصفار في كل مكوناتها إلا واحدة فقط مثلا:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5.2.3 الإرتباط والإستقلال الخطي

تعريف 6.2.3 : ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ أنها مستقلة خطيا أو إنها جملة حرة، إذا كان من أجل كل عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i\leq n}\in\mathbb{K}$ لدينا:

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n=0_E$$

حيث تكون جميع معاملاتها معدومة، أي:

$$\lambda_1=0_{\mathbb{K}},\quad \lambda_2=0_{\mathbb{K}},\quad \cdots\quad \lambda_n=0_{\mathbb{K}}.$$

0_E و $0_{\mathbb{K}}$ يمثلان صفر الفضاء الشعاعي E وصفر الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ على الترتيب.

مثال 6 : لنعتبر في الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^3$ الأشعة

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

ومنه، الشعاع b هو مزج خطي للأشعة $\{a_1, a_2, a_3\}$ و لدينا:

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 - a_2 + a_3. \end{aligned}$$

ملاحظة 4 :
- نقول عن أية عائلة من عناصر الفضاء الشعاعي، إن لم تكن مستقلة خطيا أنها مرتبطة خطيا.
- المجموعة الخالية مستقلة خطيا في أي فضاء شعاعي.

مثال 7 : كثيرات الحدود $P_1(X) = 1 - X$، $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ و $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ تشكل جملة خطية مترابطة في فضاء كثيرات الحدود$\mathscr{P}_n[X]$ لأن:

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

مثال 8 : ليكن $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، ولتكن الجملة $\{\cos, \sin\}$. لنبرهن أن هذه الجملة مستقلة خطيا: نفرض أن

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0$$

يكافئ أن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

من أجل $x = 0$ هذه المساوات تعطينا: $\lambda = 0$. ومن أجل $x = \frac{\pi}{2}$ تعطينا $\mu = 0$. أي أن الجملة $\{\cos, \sin\}$ مستقلة خطيا.
من ناحية أخرى ، الجملة $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ مرتبطة خطيا لأنه لدينا العلاقة المثلثية التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 1 = 0.$$

هنا عوامل المزج الخطي كلها غير معدومة حيث لدينا: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

نتيجة 2.2.3 : ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ أنها مرتبطة خطيا إذا وجدت عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i\leq n} \in \mathbb{K}$ ليست كلها معدومة معا، تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E.$$

مثال 9 : من المثال السابق لاحظ أن الجملة

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مرتبطة خطيا

$$a_1 - a_2 + a_3 - b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

أي

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1 : \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

ليست كلها معدومة معا.

6.2.3 القاعدو أو الأساس

تعريف 7.2.3 : لتكن $v_1, \cdots, v_n$ أشعة من الفضاء الشعاعي E، نقول عن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ أنها جملة مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كان كل شعاع من E يكتب على شكل مزج خطي في الأشعة $v_1, \cdots, v_n$.
ونكتب:

$$\forall v \in E, \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} : \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

و نقول أيضا أن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ مولدة للفضاء E. أي مرتبطة بمفهوم الفضاء الشعاعي الجزئي المولد إذا وفقط إذا كان $E = Vect(v_1, \cdots, v_n)$.

مثال 10 : لتكن على سبيل المثال الأشعة التالية $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ ، $v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ من $E = \mathbb{R}^3$. الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^3$ لأن كل شعاع $v = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$ من $\mathbb{R}^3$ يكتب

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$

هنا العوامل هي $\lambda_1 = x$ ، $\lambda_2 = y$ ، $\lambda_3 = z$.

مثال 11 : لتكن الأشعة التالية $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$ ، $v_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}$ من $E = \mathbb{R}^3$. الأشعة $\{v_1, v_2\}$ لا تشكل جملة مولدة لـ $\mathbb{R}^3$. مثلا الشعاع $v = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$ لا ينتمي للفضاء الشعاعي $Vect(v_1, v_2)$. فإذا كان فعلا فسوف نجد $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ حيث $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. والذي يكتب أيضا:

$$\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}$$

يعطينا الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

التي ليس لها حل.

مثال 12 : ليكن $\mathscr{P}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $\leq n$ الحقيقية ذات المعاملات الحقيقية. ومنه جملة كثيرات الحدود $\{1, X, X^2 \cdots, X^n\}$ تشكل جملة مولدة للفضاء $\mathscr{P}_n[X]$.

قضية 2 : لتكن $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ جملة مولدة لـ E. ومنه $\mathscr{F}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_q\}$ هي أيضا جملة مولدة لـ E إذا وفقط إذا كتب كل شعاع من $\mathscr{F}'$ على شكل مزج خطي في الجملة $\mathscr{F}$.

تعريف 8.2.3 : ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$. نقول أن الجملة $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ من E تشكل أساس للفضاء E إذا كانت:

1) $\mathcal{B}$ جملة مولدة لـ E.

2) $\mathcal{B}$ جملة مستقلة خطيا.

نظرية 1.2.3 : لتكن $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ أساس للفضاء الشعاعي E.
كل شعاع $v \in E$ يكتب على شكل كتابة وحيدة كمزج خطي في عناصر المجموعة $\mathcal{B}$. أي يوجد سلميات $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ وحيدة حيث:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

ملاحظة 5 : 1) $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ نسمى إحداثيات الشعاع v في الأساس $\mathcal{B}$.

2) التطبيق من الشكل

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

هو تقابل من الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$ نحو الفضاء الشعاعي E.

7.2.3 بعد فضاء شعاعي

تعريف 9.2.3 : إذا كان للفضاء الشعاعي E أساس $\mathcal{B}$ ذو عدد منته n من العناصر فإن الفضاء الشعاعي E ذو بعد منته ونكتب:

$$\dim(E) = Card(\mathcal{B}) = n.$$

ملاحظة 6 : الفضاء المعدوم $\{0\}$ ذو بعد معدوم أي $\dim(\{0\}) = 0$.

مثال 13 : 1) الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^2$ هو:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ومنه بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو 2.

2) الأشعة

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

تشكل أيضا أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ و أي أساس لـ $\mathbb{R}^2$ آخر فإنه يحتوي على نفس عدد العناصر.

3) بصفة عامة الفضاء $\mathbb{K}^n$ ذو بعد n لأن كل أساس له $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ يحتوي n عنصر.

4) $(\dim \mathscr{P}_n[X] = n+1)$ لأن أساس الفضاء $\mathscr{P}_n[X]$ هو $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ الذي يحتوي $n+1$عنصر.

نظرية 2.2.3 : في فضاء شعاعي ذو البعد المنته n فإن:

- كل جملة مستقلة خطيا بها n عنصر كحد أقصى،
- كل جملة مستقلة خطيا مكونة من n عنصر فهي أساس،
- كل جملة مولدة فهي مكونة من n عنصر على الأقل،
- كل جملة مولدة مكونة من n عنصر فهي أساس.

تعريف 10.2.3 : نسمي رتبة جملة أشعة، بعد الفضاء الشعاعي الذي تولده.

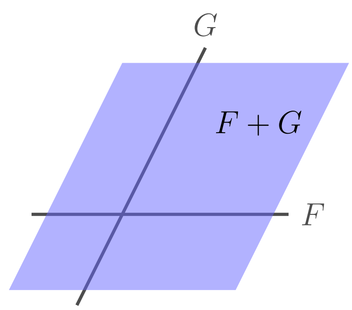
ملاحظة 7 : الملاحظات التالية هي نتائج سهلة للنظرية السابقة:

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع على الأكثر n
- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطيا.
- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة تشكل أساسا للفضاء الشعاعي الذي تولده.

8.2.3 المجموع المباشر

تعريف 11.2.3 : ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. مجموعة جميع العناصر $u+v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G نسمي مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين F و G. ونرمز له بالرمز $F+G$. ومنه نكتب:

$$F+G=\{u+v \mid u\in F, v\in G\}.$$



قضية 3 : ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. فإن:

1) $F+G$ فضاء شعاعي جزئي من E.

2) $F+G$ هو أقل فضاء شعاعي جزئي يحوي في نفس الوقت F و G.

تعريف 12.2.3 : ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. نقول أن F و G في جمع مباشر في E إذا كان:

- $F\cap G=\{0_E\}$
- $F+G=E$.

ونرمز له بالرمز $F\oplus G=E$.

إذا كان F و G في جمع مباشر نقول أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان متكاملان في E.

قضية 4 : نقول أن F و G متكاملان E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب بطريقة وحيدة

لعنصر من F وعنصر من G.

ملاحظة 8 : 1) نقول أن w من E يكتب على شكل كتابة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G يعني أن $w = u + v$ حيث $u \in F$ و $v \in G$ و كتابة أخرى من الشكل $w = u' + v'$ حيث $u' \in F$، $v' \in G$ فإنه حتما $u = u'$ و $v = v'$.

2) إذا كان لدينا $E = F \oplus G$. فإننا نقول أن الفضاء الشعاعي الجزئي F مكمل للفضاء الشعاعي الجزئي G و العكس.

3) وجود الفضاءات الشعاعية الجزئية المتكاملة يكون فقط في فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية.

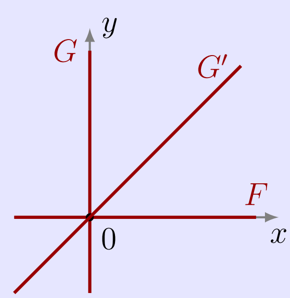
4) إذا كان لدينا $E = F \oplus G$. فإن

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

مثال 14 : 1) ليكن $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ و $G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$.

أثبت أن $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

لدينا $F \cap G = \{(0,0)\}$ وبما أن $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ فإن $F + G = \mathbb{R}^2$. أو يمكن أن نرى بسهولة أن الكتابة التالية $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ وحيدة.



2) نأخذ F ونضع $G' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. يمكننا إثبات أيضا أن : $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$

A) نثبت أن $F \cap G' = \{(0,0)\}$.

إذا كان $(x,y) \in F \cap G'$ ومنه من جهة $(x,y) \in F$ أي $y = 0$ وأيضا $(x,y) \in G'$ فإن $x = y$. وبالتالي $(x,y) = (0,0)$.

B) نثبت أن $F+G'=\mathbb{R}^2$.
لتكن $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. نبحث عن $v\in F$ و $w\in G'$ حيث $u=v+w$. بما أن $v=(x_1,y_1)\in F$ فإن $y_1=0$ و بما أن $w=(x_2,y_2)\in G'$ فإن $x_2=y_2$. إذا نجد x_1 و x_2 حيث

$$(x,y)=(x_1,0)+(x_2,x_2).$$

ومنه $(x,y)=(x_1+x_2,x_2)$. وبالتالي $x=x_1+x_2$ و $y=x_2$ حيث $x_1=x-y$ و $x_2=y$. نجد

$$(x,y)=(x-y,0)+(y,y),$$

مما يثبت أن أي عنصر من عناصر $\mathbb{R}^2$ هو مجموع عنصر من F وعنصر من G'.

3.3 سلسلة التمارين رقم 3

تمرين 1 : 1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: x\bigstar y=xy+\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$$

أثبت أن $\bigstar$ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*: x\bigstar y=\sqrt{x^2+y^2}$$

A) أثبت أن $\bigstar$ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية $\bigstar$.

الحـــل

1) نلاحظ أن

$$x\bigstar y=xy+(x^2-1)(y^2-1)=yx+(y^2-1)(x^2-1)=y\bigstar x$$

ومنه القانون $\bigstar$ تبديلي

لإثبات أن القانون ليس تجميعيا، يكفي العثور على x و y و z بحيث: