جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة
مقياس : رياضيات I

السنة الدراسية: 2022/2021
التاريخ: 06/02/2022

إمتحان السداسي الأول

تمرين 1 : (5 نقاط)
حدد ما إذا كانت العلاقة التالية انعكاسية، تناظرية، ضد تناظرية أو متعدية:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \quad x \mathscr{R} y \iff x = -y$$

وهل هي علاقة تكافؤ، أو علاقة ترتيب؟

تمرين 2 : (5 نقاط)
لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3-1}.$$

أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة 1.
حدد القيمة المأخوذة عند 1 لهذا التمديد.

تمرين 3 : (4 نقاط)
ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E.

1) متى نقول أن F و G تشكل جمع مباشر في E ؟
2) متى نقول أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان متكاملان في E؟

تمرين 4 : (6 نقاط) ليكن المجال $I =]-1, 1[$ ولنعرف قانون التشكيل الداخلي التالي بالعلاقة:

$$\forall x, y \in I : x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1) برهن أن القانون $\star$ تبديلي وتجميعي.
2) برهن أن القانون $\star$ يملك عنصر حيادي يطلب تعيينه.
3) برهن أن كل عنصر من I له عنصر نظير بالنسبة للقانون $\star$.

حل الإمتحان للسداسي الأول

• حــل التمرين رقم 1

العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $1- \neq 1$.

العلاقة تناظرية ، لأن $y = -x \iff x = -y$.

العلاقة ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.

العلاقة ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة

ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

• حــل التمرين رقم 2

ينعدم كل من البسط والمقام عند القيمة 1، لذلك لدينا حالة عدم تعيين عند حساب نهاية الدالة f عند 1. لإزالة عدم التعيين هذا، نبسط الكسر بإستخراج العامل المشترك، نجد:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

ومنه تصبح الدالة :

$$f(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}.$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1/3$$

نستنتج أن الدالة قابلة للتمديد بالإستمرار والدالة الممددة تكتب على الشكل:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x^3-1} & \text{إذا كان} \quad x \neq 1, \\ -1/3 & \text{إذا كان} \quad x = 1. \end{cases}$$

• حــل التمرين رقم 3

1) نقول أن F و G تشكل جمعا مباشرا في E إذا كان :

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$.

ونرمز له بالرمز $F \oplus G = E$.

2) إذا كان F و G في جمع مباشر نقول أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان متكاملان في E.

أو حسب القضية : نقول أن F و G متكاملان E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب بطريقة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G.

- **حـــل التمرين رقم 4**

1) التبديل: لدينا

$$x \star y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \star x$$

ومنه $\star$ تبديلي.

التجميع: لدينا

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in I : (x \star y) \star z &= \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \star z \\ &= t \star z = \frac{t+z}{1+tz} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in I : x \star (y \star z) &= x \star \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) \\ &= x \star t = \frac{x+t}{1+xt} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}. \end{aligned}$$

نلاحظ أن:

$$\forall x, y, z \in I : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

ومنه $\star$ تجميعي.

2) لإيجاد العنصر الحيادي نحل المعادلتين

$$\begin{aligned} e \star x &= x \\ x \star e &= x \end{aligned}$$

وبما أن قانون التركيب تبديلي يكفي حل معادلة واحدة. لدينا:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in I : x \star e = x \\
&\quad \Longleftrightarrow \ \frac{x+e}{1+xe} = x \\
&\quad \Longleftrightarrow \ x+e = x\left(1+xe\right) \\
&\quad \Longleftrightarrow \ e = x^2 e \\
&\quad \Longleftrightarrow \ (1-x^2)e = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow \ e = 0 \in I
\end{aligned}$$

ومنه القانون ★ يملك عنصر حيادي هو $e = 0$.

3) لإيجاد العنصر النظير نحل المعادلتين

$$\begin{aligned}
x \bigstar x' &= e \\
x' \bigstar x &= e
\end{aligned}$$

وبما أن قانون التركيب تبديلي نكتفي بمعادلة واحدة. لدينا:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in I : x \star x' = e \\
&\quad \Longleftrightarrow \ \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow \ x+x' = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow \ x' = -x \in I
\end{aligned}$$

ومنه لكل عنصر $x \in I$ عنصر نظير بالنسبة للقانون ★ هو $x' = -x \in I$.