جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة
مقياس : رياضيات I

السنة الدراسية: 2022/2023
التاريخ: 16/10/2022

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 5 (الفضاءات الشعاعية)

تمرين 1 : 1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي ★ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\bigstar y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

أثبت أن ★ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي ★ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x\bigstar y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A) أثبت أن ★ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية ★.

الحـــل

1) نلاحظ أن

$$x\bigstar y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y\bigstar x$$

ومنه القانون ★ تبديلي

لإثبات أن القانون ليس تجميعيا، يكفي العثور على x و y و z بحيث:

$$x\bigstar(y\bigstar z) \neq (x\bigstar y)\bigstar z$$

كما سنرى أدناه أن 1 هو العنصر الحيادي، ومنه يجب أن لا نأخذ 1 في إختيار العناصر x و y و z. نأخذ على سبيل المثال: $x = 0$ ، $y = 2$ و $z = 3$

$$\begin{aligned} x\bigstar(y\bigstar z) &= 0\bigstar(2\bigstar 3) \\ &= 0\bigstar(2\bigstar 3 + (2^2-1)(3^2-1)) \\ &= 0\bigstar(6+3\times 8) \\ &= 0\bigstar 30 \\ &= 0\bigstar 30 + (0^2-1)(30^2-1) = -899 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\bigstar y)\bigstar z &= (0\bigstar 2)\bigstar 3 \\ &= (0\times 2 + (0^2-1)(2^2-1))\bigstar 3 \\ &= (-3)\bigstar 3 \\ &= -3\times 3 + ((-3)^2-1)(3^2-1) \\ &= -9+82 \\ &= 55 \end{aligned}$$

القانون ★ ليس تجميعيا.

$$1\bigstar x = 1x + (1^2-1)(x^2-1) = x$$

بالإضافة لذلك ، لأن القانون تبديلي فإن:

$$x\bigstar 1 = 1\bigstar x$$

لدينا $x\bigstar 1 = 1\bigstar x = x$، 1 **هو العنصر الحيادي.**

2) A) **لدينا**

$$x\bigstar y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y\bigstar x$$

القانون ★ تبديلي.

$$(x\bigstar y)\bigstar z=\sqrt{x^2+y^2}\bigstar z=\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بإعادة الحساب أعلاه عن طريق تغيير (x,y,z) بـ (y,z,x) نجد :

$$(y\bigstar z)\bigstar x=\sqrt{y^2+z^2+x^2}$$

لأن ★ تبديلي، ومنه : القانون ★ تجميعي.

$$(y\bigstar z)\bigstar x=x\bigstar(y\bigstar z)(x\bigstar y)\bigstar z=x\bigstar(y\bigstar z)$$

كان بإمكاننا الحساب مباشرة $x\bigstar(y\bigstar z)$ لأن ★ تبديلي فإن 0 هو العنصر الحيادي.

$$0\bigstar x=\sqrt{0^2+x^2}=|x|=x,\qquad \text{لأن}\quad x\geq 0$$

$$0\bigstar x=x\bigstar 0$$

$$0\bigstar x=x\bigstar 0=x$$

B) لنفترض أن x يقبل نظير y

$$x\bigstar y=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$$

في حين $x>0$ و $y>0$ ومنه $x\bigstar y=0$ مستحيل من أجل كل $x>0$ أي x ليس له نظير.

تمرين 2 : ليكن $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و ★ القانون المعرف في G كما يلي:

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(xx',xy'+y)$$

1) أثبت أن $(G,\bigstar)$ زمرة ليست تبديلية.

2) أثبت أن $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(G,\bigstar)$.

الحـــل

$(A-1)$ **إذا كان** $x \neq 0$ **و** $x' \neq 0$ **فإنه** $xx' \neq 0$

$$(x,y)\bigstar(x',y') = (xx', xy'+y) \in \mathbb{R}^*\mathbb{R}.$$

القانون $\bigstar$ **هو قانون تركيب داخلي.**

$$\begin{aligned}(x,y)\bigstar((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*(x'x'', x'y''+y') \\ &= (xx'x'', x(x'y''+y')+y) \\ &= (xx'x'', xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}((x,y)\bigstar(x',y'))\bigstar(x'',y'') &= (xx', xy'+y)*(x'',y'') \\ &= (xx'x'', xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $\bigstar$ **تجميعي.**

$(B-1)$ **لتكن** (a,b) **حيث من أجل كل** $(x,y) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$:

$$(a,b)\bigstar(x,y) = (x,y) = (x,y)\bigstar(a,b)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(ax, ay+b) = (x,y) = (xa, xb+y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ ay+b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

ومنه $(1,0)$ **هو العنصر الحيادي.**

$(C-1)$ **ليكن** $(x,y) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ **نبحث عن** (x',y') **حيث**

$$(x,y)\bigstar(x',y') = (1,0) = (x',y')\bigstar(x,y)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(xx', xy'+y) = (1,0) = (x'x, x'y+y') \Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ x'y+y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{-y}{x} \end{cases}$$

العنصر النظير لـ (x,y) **هو** $\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right)$**. ومنه** $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}, \bigstar)$ **تشكل زمرة.**

٥

$D-1$) بما أن $(1,2)\bigstar(2,0)=(2,2)$ و $(2,0)\bigstar(1,2)=(2,4)$ فمن الواضح جدا أن الزمرة ليست تبديلية.

2) العنصر الحيادي لـ $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ هو $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
ليكن $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ و $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه

$$(x,y)\bigstar\left(\frac{1}{x'},\frac{-y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(\frac{-y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)$$

بما أن $x>0$ فإن $\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه $(\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$.

تمرين 3 : نزود المجموعة $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين المعرفين كما يلي:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

٩

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

1) أثبت أن $(A,+)$ زمرة تبديلية.

2) أثبت أن

A) القانون $*$ تبديلي.

B) القانون $*$ تجميعي.

C) اوجد العنصر الحيادي بالنسبة للقانون $*$.

D) أثبت أن $(A,+,*)$ تشكل حلقة تبديلية.

الحـــل

(1

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in A$$

ومنه القانون داخلي.

$$\begin{aligned}(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] &= (x,y)+(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x+(x'+x''),y+(y'+y''))\\ &= ((x+x')+x'',(y+y')+y'')\\ &= [(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')\end{aligned}$$

ومنه القانون + تجميعي.

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)\\ &= (x',y')+(x,y)\end{aligned}$$

ومنه القانون + تبديلي.

ليكن (a,b) **حيث** $(x,y)+(a,b)=(x,y)$**، من الواضح أن** $(a,b)=(0,0)$ **هو العنصر الوحيد الحيادي .**

ليكن (x',y') **حيث**

$$(x,y)+(x',y')=(0,0)$$

هذا يكافئ

$$(x+x',y+y')=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$$

ومنه العنصر النظير (x,y) **هو** $(-x,-y)$**. نستنتج أن** $(A,+)$ **زمرة تبديلية.**

$(A-2$

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)=(x'x,x'y+xy')=(x',y')*(x,y)$$

ومنه $*$ **تبديلي.**

$(B-2$

$$\begin{aligned}[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') &= (xx',xy'+x'y)*(x'',y'')\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''(xy'+x'y))\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''xy'+x''x'y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] &= (x,y)*(x'x'',x'y''+x''y')\\ &= (xx'x'',x(x'y''+x''y')+x'x''y)\\ &= (xx'x'',xx'y''+xx''y'+x'x''y)\end{aligned}$$

ومنه

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$$

القانون $*$ تجميعي.

$(C-2)$ **ليكن** (e,f) **حيث من أجل كل** $(x,y)\in A$،

$$(x,y)*(e,f)=(x,y)$$

e **و** f **تحقق :**

$$\begin{cases} xe=x \\ xf+ye=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ f=0 \end{cases}$$

$(1,0)\in A$ **العنصر الحيادي لـ** A **بالنسبة للقانون** $*$.

$(D-2)$ **توزيعية الجداء على الجمع**

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')+(x''+y'')] &= (x,y)*(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)\\ &= (xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)\\ &= (x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')\end{aligned}$$

في الأخير $(A,+,*)$ **حلقة تبدبلبة.**

تمرين 4 : أوجد معادلات الفضاءات الشعاعية التي تم إنشاؤها بواسطة الأشعة التالية:

- $u_1=(1,2,3)$،

- $u_1 = (1,2,3)$ و $u_2 = (-1,0,1)$،
- $u_1 = (1,2,0)$، $u_2 = (2,1,0)$ و $u_3 = (1,0,1)$.

الحـــل

نضع F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع u_1. ومنه

$$(x,y,z) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= a \\ y &= 2a \\ z &= 3a \end{cases} \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} a &= x \\ y-2x &= 0 \\ z-3x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y-2x &= 0 \\ z-3x &= 0 \end{cases}$$

لقد وجدنا بالفعل معادلات لـ F. نضع G الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1 و u_2. ومنه:

$$(x,y,z) \in G \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a-b \\ y &= 2a \\ z &= 3a+b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a &= y/2 \\ b &= z-3y/2 \\ 0 &= x-2y+z \end{cases}$$

$$\iff x-2y+z=0.$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة G. نضع H الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1، u_2 و u_3. ومنه :

$$(x,y,z) \in H \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x &= a+2b+c \\ y &= 2a+b \\ z &= c \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a+2b+c &= x \\ -3b-2c &= y-2x \\ c &= z \end{cases}$$

الجملة تقبل حلا مهما كانت قيم x، y و z. و بالتالي $H = \mathbb{R}^3$.

تمرين 5 : أوجد الأشعة المولدة للفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$:

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$،
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \quad \text{و} \quad 2x-y-z=0\}$.

الحـــل

- **لدينا**

$$\begin{aligned}(x,y,z) \quad \in \quad F &\iff x=-2y+z \iff \begin{cases} x=-2y+z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\iff (x,y,z)=(-2y+z,y,z), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}, \\ &= y(-2,1,0)+z(1,0,1), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

نضع $u_1=(-2,1,0)$ **و** $u_2=(1,0,1)$ **ومنه نجد** $F=vect(u_1,u_2)$.

- **لدينا**

$$(x,y,z)\in G \iff \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2x-y-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ y-3z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z)=z\,(2,3,1)$$

ومنه نجد $G=vect(u)$ **حيث** $u=(2,3,1)$

تمرين 6 : لتكن في $\mathbb{R}^4$ الأشعة $v_1=(1,2,3,4)$ **و** $v_2=(1,-2,3,-4)$.

- **هل نستطيع إيجاد** x **و** y **حيث** $(x,1,y,1)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟
- **هل نستطيع إيجاد** x **و** y **حيث** $(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

الحـــل

- لنا:

$$
\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in Vect\{v_1,v_2\} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda) + (\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad 1 = 2(\lambda-\mu) \quad \text{و} \quad 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

وهو مستحيل (أيا كان x,y). لذلك لا يمكننا العثور على مثل x,y.

- بنفس المنطق :

$$
\begin{aligned}
& (x,1,1,y) \in Vect\{v_1,v_2\} \\
iff\ & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
\iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

لذا فإن الشعاع الوحيد $(x,1,1,y)$ الذي يناسب $(\frac{1}{3},1,1,2)$.