Chapitre 04 : Modulation de phase PM et de fréquence FM

4.1. Modulation d'argument (PM ou FM)

La forme générale d'une porteuse sinusoïdale modulée en argument s'écrit:

$x_p(t) = A_p cos\left(\omega_p t + \phi(t)\right)$ (1)

Dans la modulation de phase, la phase instantanée $\phi(t)$ est proportionnelle au signal information m(t) :

$\phi(t) = k_\phi m(t)$ (2)

où k_ϕ est la constante d'excursion de phase.

Dans la modulation de fréquence, la fréquence instantanée $\frac{d\phi(t)}{dt}$ est proportionnelle au signal information m(t) :

$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = k_f m(t) \Rightarrow \phi(t) = k_f \int_{t_0}^{t} m(t')dt' + \phi(t_0)$ (3)

où k_f est la constante d'excursion de fréquence.

La fréquence instantanée ω_i de la porteuse s'écrit alors :

- $\omega_i = \omega_p + k_\phi \frac{dm(t)}{dt}$ en modulation de phase.
- $\omega_i = \omega_p + k_f m(t)$ en modulation de fréquence.

4.2. Transformée de Fourier d'un signal modulé en PM ou FM

On peut écrire l'expression (1) de la porteuse modulée en PM/FM sous la forme :

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega_p t + \phi(t))}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{j\omega_p t} e^{j\phi(t)}\right)$$

Comme la fonction exponentielle peut être représentée par la somme :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Alors :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \mathrm{Re}\left\{Ae^{j\omega_p t}\left[1 + j\phi(t) - \frac{\phi^2(t)}{2!} - \ldots + j^n \frac{\phi^n(t)}{n!} + \ldots\right]\right\} \\ &= A\left[\cos\omega_p t - \phi(t)\sin\omega_p t - \frac{\phi^2(t)}{2!}\cos\omega_p t + \frac{\phi^3(t)}{3!}\sin\omega_p t + \ldots\right] \end{aligned}$$

Le spectre de $x_p(t)$ comporte donc une porteuse non module $\left(cos(\omega_p t)\right)$ accompagnée des spectres de $\phi(t), \phi^2(t), \phi^3(t)$, etc., centrés sur ω_p.

4.3. Modulation d'argument à bande étroite (*narrow band PM or narrow band FM*)

Dans le cas où : $|\phi(t)|_{max} \ll |\omega_p t|_{max} = 2\pi$, l'approximation de la formule (1) donne :

$$x_p(t) = A_p cos\left(\omega_p t + \phi(t)\right) = A_p\left(cos(\omega_p t)cos(\phi(t)) - sin(\omega_p t)sin(\phi(t))\right)$$

$$x_p(t) \cong A_p\left(cos(\omega_p t) - \phi(t)sin(\omega_p t)\right) \quad (4)$$

Le spectre d'un signal NBPM (*narrow band phase modulation*) ou NBFM (*narrow band frequency modulation*) possède, comme le signal AM, une bande passante de 2B où B est la fréquence maximale du message m(t).

4.4. Modulation PM ou FM par une sinusoïde pure

Prenons le cas où le message m(t) est une sinusoïde de la forme :

$$m(t) = \begin{cases} a_m \sin\omega_m t & \text{en mode PM} \quad (5) \\ a_m \cos\omega_m t & \text{en mode FM} \quad (6) \end{cases}$$

a) Indice de modulation :

a.1) Modulation PM :

En remplaçant (5) et (2) dans (1) :

$$x_p(t) = A_p cos\left(\omega_p t + k_\phi A_m sin(\omega_p t)\right)$$

Le paramètre $\beta = k_\phi A_m$, est l'indice de modulation, il définit la valeur maximale de l'excursion de phase :

$\beta = max(\phi(t)) = max\left(k_\phi A_m sin(\omega_p t)\right) = k_\phi A_m$.

a.2) Modulation FM :
En remplaçant (6) et (3) dans (1) :

$$x_p(t) = A_p cos\left(\omega_p t + k_f \int A_m cos(\omega_m t)dt\right)$$
$$= A_p cos\left(\omega_p t + \frac{k_f A_m}{\omega_m} sin(\omega_m t)\right)$$

Le paramètre $\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m}$, est l'indice de modulation, il définit la valeur maximale de l'excursion de phase :

$$\beta = max(\phi(t)) = max\left(\frac{k_f A_m}{\omega_m} sin(\omega_m t)\right) = \frac{k_f A_m}{\omega_m}.$$

b) Spectre du signal PM ou FM :
Le signal PM ou FM modulé par une sinusoïde pure s'écrit :

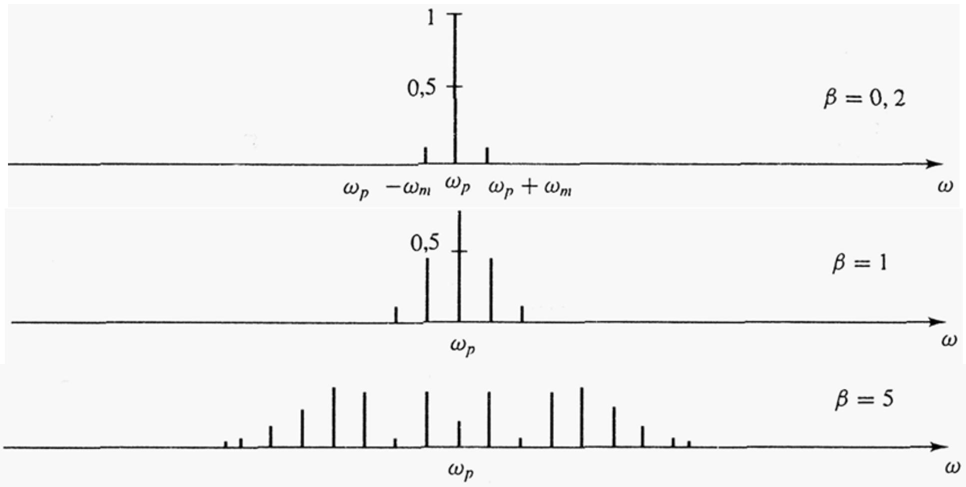
$$x_p(t) = A_p cos\left(\omega_p t + \beta\ sin(\omega_m t)\right)$$

Un développement en série de Fourier de $x_p(t)$ montre que ce signal s'exprime de la façon suivante:

$$x_p(t) = A_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) cos\left((\omega_p + n\omega_m)t\right)$$
$$= A_p\left(J_0(\beta)cos(\omega_p t) + J_1(\beta)cos\left((\omega_p \pm \omega_m)t\right) + J_2(\beta)cos\left((\omega_p \pm 2\omega_m)t\right) + \cdots\right)$$

$J_n(\beta)$ est la fonction de Bessel du première espèce d'ordre *n* et d'argument *β*.

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0,00	1,00										
0,25	0,98	0,12									
0,5	0,94	0,24	0,03								
1,0	0,77	0,44	0,11	0,02							
1,5	0,51	0,56	0,23	0,06	0,01						
2,0	0,22	0,58	0,35	0,13	0,03						
2,5	-0,05	0,50	0,45	0,22	0,07	0,02					
3,0	-0,26	0,34	0,49	0,31	0,13	0,04	0,01				
4,0	-0,40	-0,07	0,36	0,43	0,28	0,13	0,05	0,02			
5,0	-0,18	-0,33	0,05	0,36	0,39	0,26	0,13	0,05	0,02		
6,0	0,15	-0,28	-0,24	0,11	0,36	0,36	0,25	0,13	0,06	0,02	
7,0	0.30	0,00	-0,30	-0,17	0,16	0,35	0,34	0,23	0,13	0,06	0,02
8,0	0,17	0,23	-0,11	-0,29	-0,10	0,19	0,34	0,32	0,22	0,13	0,06



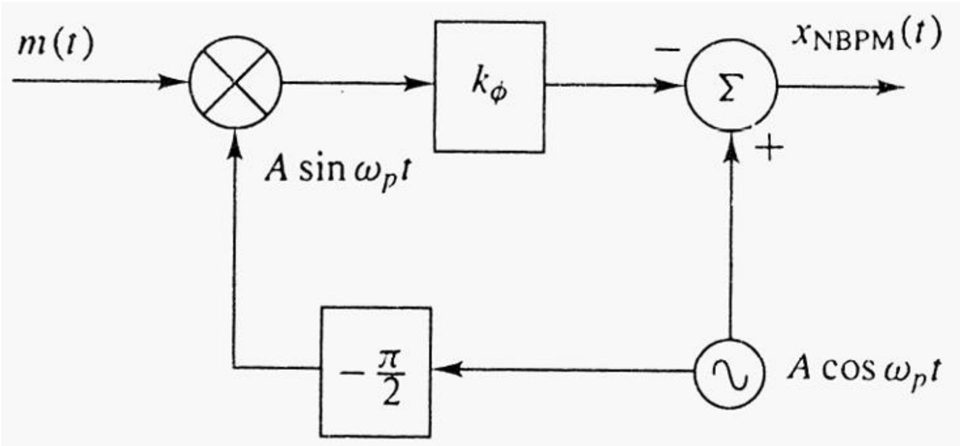
c) Largeur de bande :
La règle de Carson permet d'évaluer la largeur de bande d'un signal modulé en fréquence. On peut montrer qu'en fait 98% de la puissance moyenne du signal est contenue dans une largeur de bande B_C telle que :

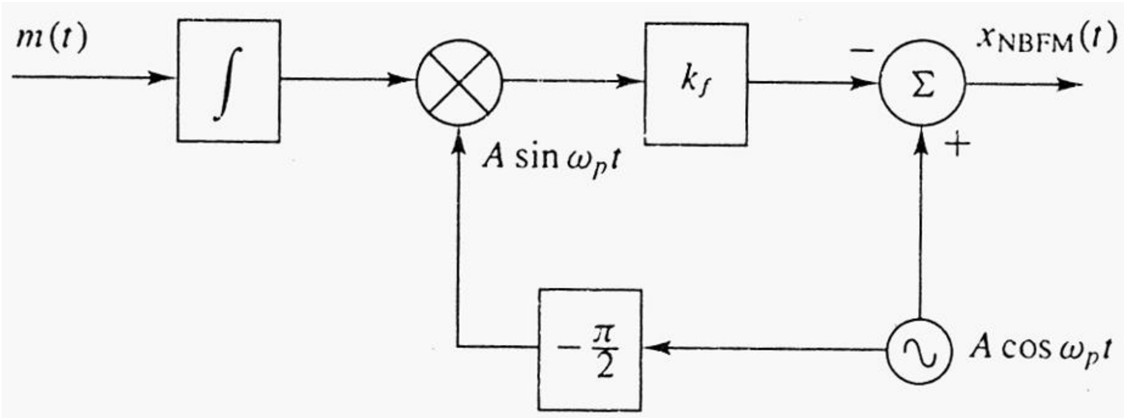
$$B_C = 2\omega_m(1 + \beta)$$

4.5. Systèmes de modulation PM ou FM

a) NBPM ou NBFM

En se basant sur l'équation (5), le modulateur NBPM et NBFM sont illustrés par les figures suivantes.

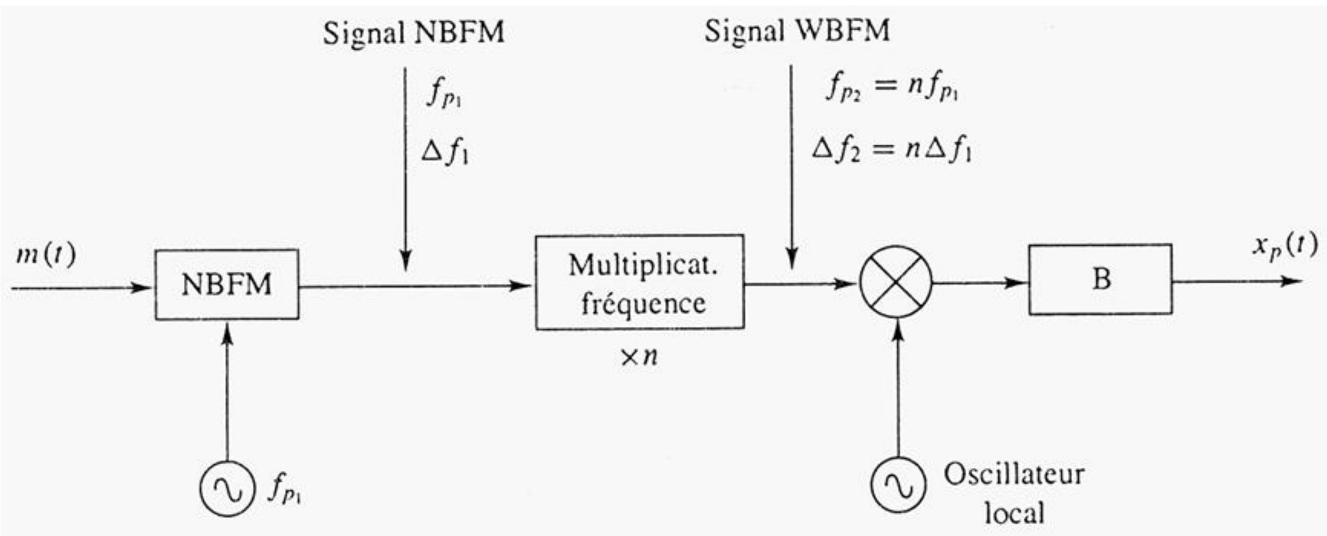




b) Modulation PM ou FM à bande large

b.1) Conversion bande étroite - bande large

L'utilisation d'un multiplicateur de fréquence accroît de façon considérable la valeur de la fréquence porteuse. Pour remédier à cet inconvénient, il est nécessaire de faire appel à un convertisseur de fréquence (mélangeur ou modulateur BLD) pour décaler le spectre du signal modulé.



b.2) Utilisation d'un VCO (*voltage controlled oscillator*)

Un oscillateur commandé en tension (VCO) est un oscillateur électronique dont la fréquence d'oscillation est commandée par une entrée de tension. La tension d'entrée appliquée détermine la fréquence d'oscillation instantanée.