2- مسألة التخفيض MIN:

مثال: ليكن النموذج التالي:

$$MinC = 5X1 + 3X2$$

$$X1 + 2X2 \geq 2$$

$$2X1 + X2 \leq 3$$

$$X1, X2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلاكس؟

حل المثال:

تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$X1 + 2X2 - A1 + A2 = 2$$

$$2X1 + X2 + A3 = 3$$

$$MinC = 5X1 + 3X2 + 0A1 + MA2 + 0A3$$

$$X1, X2, A1, A2, A3 \geq 0$$

الكميات Q	المتغيرات V	المعاملات C	5	3	0	M	0	عمود الكميات/عمود المتغيرة الداخلة
			X_1	X_2	A_1	A_2	A_3	
M	A2	2	1	2	-1	1	0	1
0	A3	3	2	1	0	0	1	3
C= 2M			M-5	2M-3	-M	0	0	

ملاحظات:

- يحتوي عمود المتغيرات(V) في الحل الأولي على متغيرات الفوارق والمتغيرات الاصطناعية، ولا تظهر متغيرات الزيادة في عمود المتغيرات في الحل الأولي.
- المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات (V) تكون قيمتها في سطر التقييم معدومة.
- نحسب قيمة التكاليف C بضرب عمود المعاملات في عمود الكميات (Σ Qi * Ci).
- سطر التقييم هو نتائج خاصة بكل عمود، ويساوي مجموع (حاصل ضرب عمود المعاملات في عمود المعاملات التقنية) طرح معامل دالة الهدف.
- يعتبر الحل أمثل في مسألة التخفيض (Min) إذا كانت قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة، وفي مثالنا السابق وباعتبار المسألة تخفيض هناك قيم موجبة في سطر التقييم وبالتالي الحل غير أمثل يستدعي عملية التحسين.
- نختار أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم وهي التي تحدد المتغيرة الداخلة للحل (في مثالنا 2M-3) وبالتالي المتغير X2 يدخل للحل، والمتغير الخارج من الحل هو A2 ونحصل على جدول جديد.

– كلما يكون المتغير الخارج من الحل هو متغير اصطناعي يمكن الاستغناء عن العمود الخاص به.

الكميات Q	المتغيرات V	المعاملات C	5	3	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_3
3	X2	1	1/2	1	−1/2	0
0	A3	2	3/2	0	1/2	1
C= 3			−7/2	0	−3/2	0

نلاحظ أن كل قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي الحل أمثل، المؤسسة تنتج 1 وحدة من المنتوج الثاني ولا تنتج من المنتوج الأول، وتحقق ربح أعظمي قدره 3 دج، ويتبقى من المورد الثاني 2 وحدة غير مستغلة، أما بالنسبة للقيود نتحقق هل تم استغلال الموارد وهل هي محققة كما يلي:

تم استغلال كل المورد الأول $0 + 2(1) = 2 \geq 2$

$2(0) + 1 = 1 \leq 3$

الكمية المتبقية من المورد الثاني هي 3−1= 2 وهي الكمية التي تظهر في السطر الثاني للمتغير A3=2، وبالتالي القيد محقق.

3– الحالات الخاصة في طريقة السمبلاكس:

أ– **الحل البديل:** نعلم بأن هناك حل بديل إذا كان متغير لم يدخل في الحل في عمود المتغيرات في الحل الأمثل والقيمة الخاصة به في سطر التقييم مساوية للصفر، ويمكن الحصول على الحل البديل باعتبار هذا المتغير كمتغيرة داخلة مع إجراء جميع الخطوات التي تطرقنا لها سابقا في عملية التحسين ونتحصل على نفس القيمة لدالة الهدف.

ب–**عدم وجود حلول تماما:** في حالة وجود المتغير الاصطناعي في عمود المتغيرات في الحل الأمثل هذا يعني أن هذه المسألة ليس لها حل.

ت–**وجود حلول لا متناهية:** في حالة عملية التحسين بحيث يتم تحديد المتغيرة الداخلة ونتحصل على قيم سالبة أو عدم تعيين نكون بصدد حلول لا متناهية للمسألة.

ث–عدم الانتظام: في بعض الحالات لما يتم الاختيار العشوائي بين قيمتين متساويتين لتحديد المتغيرة الخارجة فإن اختيار أحد القيمتين من الممكن أن يجعلنا نبقى في حالة دوران (حلقة مفرغة) لتحديد المتغيرة الداخلة والخارجة.

4-المسألة المعكوسة أو المسألة الثنائية أو البرنامج النظير:

ترتبط كل برنامج خطي مطروح (أولي) ببرنامج خطي آخر ثنائي (مسألة معكوسة) على أن يكون البرنامج المطروح على صيغته النظامية، ونستخدمها عموما لما يكون لدينا عدد كبير من القيود وعدد قليل من المتغيرات، وتتمثل مراحل الحل كما يلي:

- تحويل دالة الهدف من دالة تعظيم (Max) على دالة تخفيض (Min) والعكس صحيح.
- معاملات دالة الهدف تصبح هي قيم الطرف الثاني من القيود (الموارد)، وقيم الطرف الثاني من القيود تصبح هي معاملات دالة الهدف.
- تحويل أعمدة مصفوفة القيود (معاملات X1 في القيود) لتصبح أسطر في المسألة المعكوسة.
- تحويل اتجاه متراجحات القيود من أكبر أو يساوي (≥) إلى أقل أو يساوي (≤) والعكس صحيح.
- تغيير رمز المتغيرات من (Xi) إلى (Yi) مثلا.

مثال:

$$\text{Max } Z = 30x_1 + 20x_2$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 420$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 300$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

استخراج نموذج المسألة المعكوسة:

$$\text{Min}C = 420Y1 + 300Y2 + 240Y3$$
$$6Y1 + 3Y2 + 4Y3 \geq 30$$
$$6Y1 + 6Y2 + 2Y3 \geq 20$$
$$Y1, Y2, Y3 \geq 0$$

تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$\text{Min}C = 420Y1 + 300Y2 + 240Y3$$
$$6Y1 + 3Y2 + 4Y3 - A1 + A2 = 30$$
$$6Y1 + 6Y2 + 2Y3 - A3 + A4 = 20$$
$$Y1, Y2, Y3, A1, A2, A3, A4 \geq 0$$

الكميات Q	المتغيرات V	المعاملات C	420	300	240	0	M	0	M	عمود الكميات/عمود المتغيرة الداخلة
			Y_1	Y_2	Y3	A_1	A_2	A_3	A_4	
M	A2	30	6	3	4	-1	1	0	0	5
-M	A4	20	6	6	2	0	0	-1	1	3,66
C= 50M			12M-420	9M-300	6M-240	-M	0	-M	0	

نلاحظ وجود قيم موجبة في سطر التقييم وبالتالي الحل غير أمثل، نختار أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم وهي التي تحدد المتغيرة الداخلة للحل (في مثالنا 12M−420) وبالتالي المتغير Y1 يدخل للحل، والمتغير الخارج من الحل هو A4 ونحصل على جدول جديد.

الكميات Q	المتغيرات V	المعاملات C	420	300	240	0	M	0	عمود الكميات/عمود المتغيرة الداخلة
			Y_1	Y_2	Y3	A_1	A_2	A_3	
M	A2	10	0	−3	2	−1	1	1	5
420	Y1	10/3	1	1	1/3	0	0	−1/6	10
C= 10M+1400			0	−3M+120	2M−100	−M	0	M−70	

نلاحظ وجود قيم موجبة في سطر التقييم وبالتالي الحل غير أمثل، نختار أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم وهي التي تحدد المتغيرة الداخلة للحل (في مثالنا 2M−100) وبالتالي المتغير Y3 يدخل للحل، والمتغير الخارج من الحل هو A2 ونحصل على جدول جديد.

الكميات Q	المتغيرات V	المعاملات C	420	300	240	0	0	
			Y_1	Y_2	Y3	A_1	A_3	
240	Y3	5	0	−3/2	1	−1/2	1/2	
420	Y1	5/3	1	3/2	0	1/6	−1/3	
C= 1900			0	−30	0	−50	−20	

نلاحظ أن كل قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي الحل أمثل.

استنتاج حل المسألة المطروحة من المسألة المعكوسة (البرنامج الثنائي):

- إن حل المسألة المطروحة يستخرج مباشرة من حل المسألة المعكوسة والعكس صحيح.
- إن قيمة دالة الهدف هي نفسها في المسألة المطروحة أو المعكوسة (MaxZ = MinC = 1900).
- القيم الموجودة في سطر التقييم في جدول الحل الأمثل في المسألة المطروحة والمقابلة لمتغيرات الفوارق بالقيمة المطلقة تشكل المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل للمسألة المعكوسة

A1=50 ⟹ X1=50 ، A2= 20 ⟹ X2=20 ، Y2=30 ⟹ A2=30

- قيم المتغيرات الأساسية في عمود المتغيرات الموجودة في الحل الأمثل في المسألة المعكوسة تشكل قيم متغيرات الفوارق في سطر التقييم في جدول الحل الأمثل في المسألة المطروحة

Y1=5/3 ⟹ A1=5/3 Y2= 5 ⟹ A2=5

- بالنسبة للمصفوفة التقنية تصبح الأسطر أعمدة والأعمدة أسطر بالنسبة للمتغيرات مع عكس الإشارة.
- إذا لك يكن للمسألة المطروحة حل كذلك المسألة المعكوسة لن يكون لها حل.

المعاملات C	المتغيرات V	الكميات Q	30	20	0	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2	A_2
0	A_2	30	0	0	−3/2	1	3/2
30	X_1	50	1	0	−1/6	0	1/2
20	X_2	20	0	1	1/3	0	−1/2
Z= 1900			0	0	5/3	0	5

المؤسسة تقوم بإنتاج 50 وحدة من X_1، و 20 وحدة من X_2، ويتبقى من المورد الثاني A_2 30 وحدة غير مستغلة، وتحقق أعظم ربح قدره MaxZ= 1900

تمرين للحل في الأعمال الموجهة:

أوجد حل للنموذج التالي باستخدام البرنامج الثنائي أو المسألة المعكوسة:

$$\text{Min } C = 20\,x_1 + 10\,x_2$$
$$x_1 + 2\,x_2 \geq 150$$
$$4\,x_1 + 4\,x_2 \geq 200$$
$$3\,x_1 + x_2 \geq 160$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$