1 مقدمة

عند التوازن تهتز ذرات الجسم الصلب حول أوضاع توازنها ولكن عند تأثر الجسم بقوى خارجية فإنه سيبدأ بالتشوه حيث تتغير الفاصلة الذرية ويخرج الجسم عن حالة توازنه السابقة، ولكن القوى الداخلية تحاول إعادة وضع توازن الجسم على ما كان عليه أي يتم الصراع بين القوى الداخلية والخارجية للعودة إلى وضع التوازن والقول عن الجسم بأنه مرن إتجاه هاته القوى الخارجية. وعند حدوث تشوه موضعي فإنه سينتقل إلى كامل الجسم على هيئة موجات المرونة بحكم الترابط بين عناصر الجسم.

تدرس عادة خواص مرونة البلورات طبقا للنموذج التالي:

- البلورة عبارة عن وسط مستمر متجانس غير متماثل المناحي.
- الدراسة النظرية لهذا النموذج تعتمد أساسا على قوانين نيوتن التقليدية وقانون هرك.

2 الإجهاد الميكانيكي

القوى المؤثرة على دقائق الجسم الصلب تصلها عن طريق السطح الخارجي ولها علاقة مع سطح الجسم الذي تؤثر عليه.

القوى تقاس بالنسبة إلى وحدة المساحات وتسمى الإجهاد.

ندرس الحالة التي يكون فيها الإجهاد منتظم في كل الجسم الموجود في حالة توازن ميكانيكي. ندرس من الجسم مكعب أحادي (طول ضلعه وحدة واحدة) وحروفه تنطبق على المحاور الكارتزية.

القوة المطبقة على كل سطح من سطوح المكعب تتحل إلى 3 مركبات، نرمز للإجهادات الموافقة σ_{ij} حيث i إتجاه القوة المطبقة على وحدة المساحة العمودية على الإتجاه j.

σ_{ii}: تسمى الإجهادات العمودية.

σ_{ij}: تسمى الإجهادات المماسية أو الانزياحية.

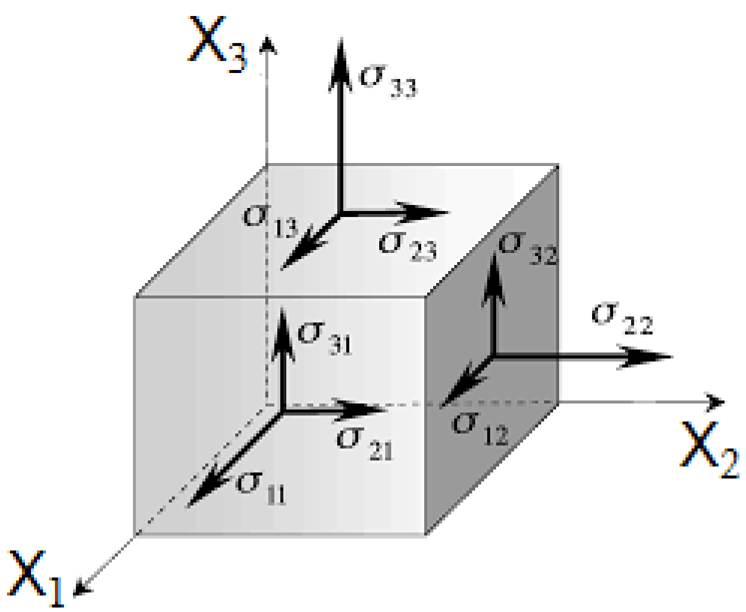
مثال: σ_{23} هي مركبة الإجهاد الناتجة عن تأثير مركبة القوة بإتجاه X_2 والتي تؤثر على وحدة المساحات العمودية على X_3.

شروط التوازن الستاتيكي للمركبات الانزياحية تحقق العلاقة:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad i,j=(1,2,3) \qquad (1.4)$$

إذن حالة الإجهاد توصف بـ 6 مركبات مستقلة وهي تشكل مصفوفة متناظرة.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



الشكل 1.4: تمثيل مركبات الإجهاد الميكانيكي.

3 ممتد التشوه

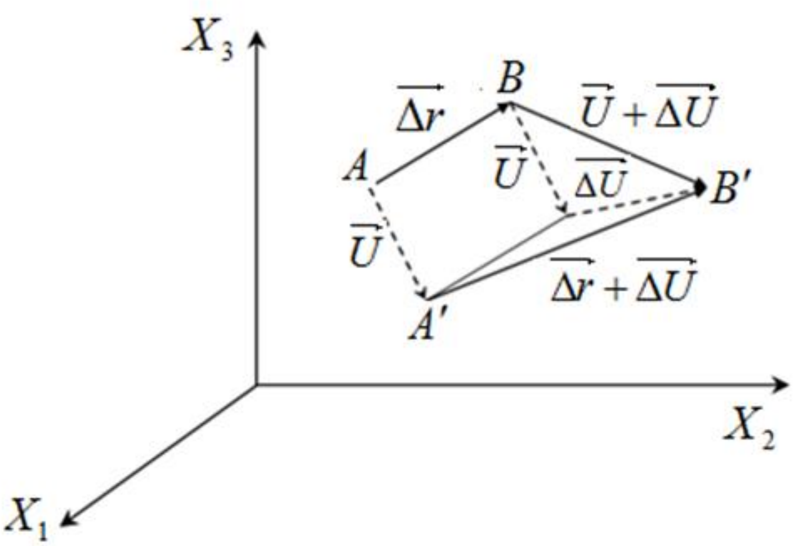
عندما يكون الجسم معرضا إلى إجهاد صغير فإن تشوه الجسم يكون قليلا وعكوسيا، أي أنه بإزالة التأثير الخارجي تعود ذرات الجسم إلى وضعها الأصلي قبل التشوه، مثل هذا التشوه يسمى مرنا. ولكنه عندما يكون الإجهاد الخارجي كبيرا فإن التشوه سيكون كبيرا ويتجاوز حدود مرونة الجسم ويكون غير عكسي يسمى بالتشوه اللدائني (بلاستيكي).

نتناول دراسة التشوهات الصغيرة التي تحصل تحت تأثير قوى غير كبيرة.

إنزياح أي نقطة من نقاط الجسم هي دالة للإحداثيات: $\vec{U} = \vec{U}(x_1, x_2, x_3)$.

شعاع الانزياح يتناسب خطيا مع إحداثيات تلك النقطة:

$$\begin{cases} U_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 \\ U_2 = \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 \\ U_3 = \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 \end{cases}$$



$$\overrightarrow{U_A} = \vec{U}$$

$$\overrightarrow{U_B} = \vec{U} + \Delta\vec{U}$$

الشكل 2.4:

من الشكل:

$$\vec{U} = \left[\varepsilon_{ij}\right] \vec{r} \qquad (2.4)$$

حيث: $\left[\varepsilon_{ij}\right]$ ممتد الانزياحات الصغيرة.

لدينا مركبات شعاع الانزياح: $[U_1(x_1, x_2, x_3), U_2(x_1, x_2, x_3), U_3(x_1, x_2, x_3)]$

ومنه نكتب:

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3}\Delta x_3 \\ \Delta U_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_3}\Delta x_3 \\ \Delta U_3 = \dfrac{\partial U_3}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial U_3}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3}\Delta x_3 \end{cases} \qquad (3.4)$$

لدينا:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad (4.4)$$

ومنه:

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \varepsilon_{11}\Delta x_1 + \varepsilon_{12}\Delta x_2 + \varepsilon_{13}\Delta x_3 \\ \Delta U_2 = \varepsilon_{21}\Delta x_1 + \varepsilon_{22}\Delta x_2 + \varepsilon_{23}\Delta x_3 \\ \Delta U_3 = \varepsilon_{31}\Delta x_1 + \varepsilon_{32}\Delta x_2 + \varepsilon_{33}\Delta x_3 \end{cases}$$

من الشكل:

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\Delta x_j \qquad i = (1,2,3) \qquad (5.4)$$

أي عناصر ممتد التشوه تربط مركبات شعاعين: الشعاع $\overrightarrow{\Delta U}$ (الإزاحة النسبية لنقاط الجسم) والشعاع $\overrightarrow{\Delta r}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{pmatrix}$ متجه الموضع النسبي قبل التشوه.

وللتعريف على دلائل عناصر ممتد التشوه نأخذ الحالة المبسطة التالية:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta x_1 \vec{\imath}$$

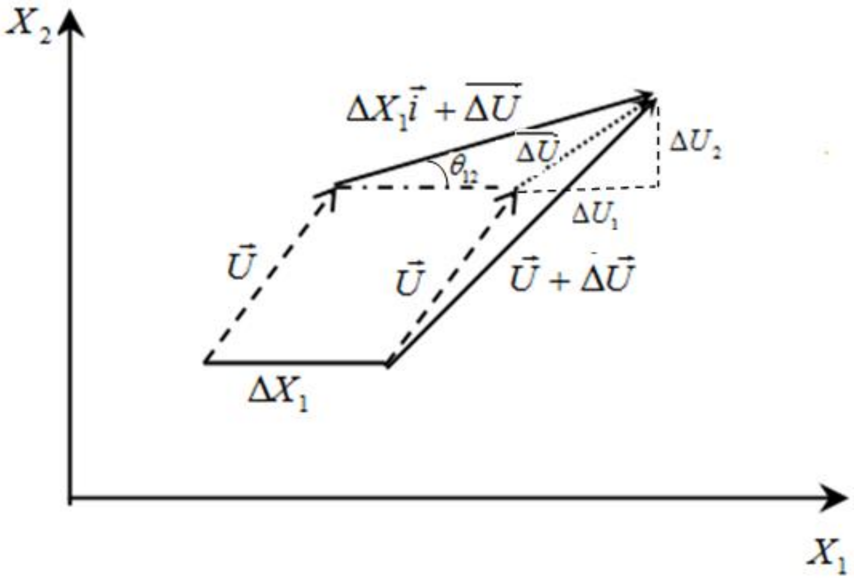
$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$$

ومنه:

$$\begin{cases} \Delta U_1 = \varepsilon_{11}\Delta x_1 \\ \Delta U_2 = \varepsilon_{21}\Delta x_1 \\ \Delta U_3 = \varepsilon_{31}\Delta x_1 \end{cases}$$

يمكن أن نكتب:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta x_1(1+\varepsilon_{11}) - \Delta x_1}{\Delta x_1}$$



الشكل 3.4:

إذن: ε_{11} يصف التمدد النوعي (لوحدة الطول) بموازاة المحور $o\mathrm{x}_1$.

تعميم: $\varepsilon_{\mathrm{ii}}$ $(i = 1,2,3)$ هي معاملات تصف التمدد النوعي بموازاة $o\mathrm{x}_1, o\mathrm{x}_2, o\mathrm{x}_3$ على الترتيب.

من الشكل السابق:

$$tg\theta_{21} \cong \theta_{21} = \frac{\Delta U_2}{\Delta \mathrm{x}_1 + \varepsilon_{11}\Delta \mathrm{x}_1} \sim \varepsilon_{21}$$

لأن: $\varepsilon_{11} << 1$

ε_{21}: دوران حول $o\mathrm{x}_3$ نحو جهة $o\mathrm{x}_2$ لمستقيم يوازي $o\mathrm{x}_1$.

تعميم: $\varepsilon_{\mathrm{ij}}$ هو زاوية الدوران حول المحور $o\mathrm{x}_k$ $(i \neq j \neq k)$ نحو جهة $o\mathrm{x}_i$ لمستقيم يوازي $o\mathrm{x}_j$.

ويكون مثلا: $\varepsilon_{21} \neq \varepsilon_{12}$ أي الممتد $[\varepsilon_{\mathrm{ij}}]$ يكون عموما غير متناظر.

وبالإمكان أن نكتب: $[\varepsilon_{\mathrm{ij}}] = [\mathrm{e}_{\mathrm{ij}}] + [\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}]$

الممتد $[\mathrm{e}_{\mathrm{ij}}]$ ممتد متناظر

الممتد $[\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}]$ ممتد ضد متناظر

حيث:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_{\mathrm{ii}} = \varepsilon_{\mathrm{ii}} \\ \mathrm{e}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mathrm{ij}} + \varepsilon_{\mathrm{ji}}\right) = \mathrm{e}_{\mathrm{ji}} \\ \mathrm{w}_{\mathrm{ii}} = 0 \\ \mathrm{w}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mathrm{ij}} - \varepsilon_{\mathrm{ji}}\right) = -\mathrm{w}_{\mathrm{ji}} \end{cases} \qquad (6.4)$$

الممتد $[\mathrm{w}_{\mathrm{ij}}]$ يصف عملية دوران محظ لنقاط الجسم حول محور يمر بالنقطة "o" (ليس هناك مساهمة في التشوه).

الممتد $[e_{ij}]$ يصف التشوه حيث المركبات القطرية e_{ii} تحمل نفس معنى المركبات القطرية ε_{ii} وتصف التمدد أو الكبس الطولي أما المركبات اللاقطرية e_{ij} $(i \neq j)$ فتصف الانزياح الزاوي.

مثال تطبيقي:

إيجاد التغير النسبي بالحجم تحت تأثير الكبس الهيدروستاتيكي الموصوف بالممتد:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -\Delta P & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta P & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta P \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\acute{V} - V}{V}$$

حيث: V الحجم قبل التشوه، $\grave{V}$ الحجم بعد التشوه

$$V = \Delta x_1 . \Delta x_2 . \Delta x_3$$

$$\grave{V} = \Delta \grave{x}_1 . \Delta \grave{x}_2 . \Delta \grave{x}_3$$

$$e_{ii} = \frac{\Delta \grave{x}_i - \Delta x_i}{\Delta x_i} \qquad (i = 1,2,3)$$

في حالة الكبس يكون: $e_{ii<0}$

$\Delta \grave{x}_i$ الطول الجديد لـ Δx_i بسبب التشوه.

$$\Delta \grave{x}_i = \Delta x_i (1 + e_{ii})$$

$$\acute{V} = \Delta \grave{x}_1 . \Delta \grave{x}_2 . \Delta \grave{x}_3 = V(1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33})$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\acute{V} - V}{V} = \frac{V}{V}[(1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) - 1]$$

$$= 1 + e_{11} + e_{22} + e_{33} - 1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} e_{ii}$$

نهمل الحدود المتكونة عن حاصل ضرب معاملات التشوه الصغيرة.

4 قانون هوك

تشوه الجسم يكون عكوسيا إذا لم يبلغ الإجهاد المسلط حدا معينا يسمى حد المرونة وهذا الحد يعتمد على نوع المادة ويقاس تجريبيا.

يخضع التشوه العكوسي (ضمن حدود المرونة) إلى قانون هوك المعمم:

$$\sigma_{ij} = \sum_{l,m=1}^{3} C_{ijlm} e_{lm} \qquad (i,j = 1,2,3) \qquad (7.4)$$

$$e_{ij} = \sum_{l,m=1}^{3} S_{ijlm} \sigma_{lm} \qquad (i,j = 1,2,3) \qquad (8.4)$$

C_{ijlm}: معاملات مرونة الصلابة وحدتها $[\frac{N}{m^2}]$.

S_{ijlm}: معاملات المرونة المطاوعة وحدتها $[\frac{m^2}{N}]$.

عدد معاملات المرونة C أو S يساوي: (9×9) 81 وتشكل مصفوفة. تناظر ممتد التشوه والإجهاد يجعل مصفوفتا معاملات المرونة C أو S متناظرتان أيضا:

$$S_{ijlm} = S_{imlj} \quad (j \leftrightarrows m) \qquad (9.4)$$

$$S_{ijlm} = S_{ljim} \quad (i \leftrightarrows l) \qquad (10.4)$$

وبذلك يصبح عدد معاملات المرونة المستقلة (6×6) 36، وباستخدام أفكار طاقة المرنة وقوانين الديناميكا الحرارية يمكن تبيان أن:

$$S_{ijlm} = S_{lmij} \quad (ij \leftrightarrows lm) \qquad (11.4)$$

وبذلك ينقص عدد معاملات المرونة المستقلة إلى 21. وهذا العدد ينقص كثيرا إعتمادا على تناظر البلورة. كما أن الاستبدال $(i \leftrightarrows j)$ و$(l \leftrightarrows m)$ لا يؤثر كذلك على قيم معاملات المرونة. لهذا كله يتم التعامل

بالصيغة الثنائية لمعاملات المرونة: S_{pg} أو C_{pg} بدلا من الصيغة الرباعية S_{ijlm} أو C_{ijlm} طبقا للتبديل التالي:

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6$$

وبالتالي يأخذ قانون هوك المعمم الصيغة التالية:

$$\sigma_p = \sum_{g=1}^{6} C_{pg} e_g \qquad (p = 1, \ldots .6) \qquad (12.4)$$

$$e_p = \sum_{g=1}^{6} S_{pg} \sigma_g \qquad (p = 1, \ldots .6) \qquad (13.4)$$

معاملات المرونة S و C مرتبطة مع بعضهما بالعلاقات التالية:

$$S_{pg} = \frac{(-1)^{P+g} \Delta_{Pg}^{C}}{\Delta^{C}} \qquad (14.4)$$

Δ^{C}: محدد متكون من معاملات المرونة $[C_{pg}]$.

Δ_{Pg}^{C}: المحدد الأصغر يتحصل عليه بإلغاء السطر الأفقي P والعمودي g للمحدد Δ^{C}

ويكون:

$$C_{pg} = \frac{(-1)^{P+g} \Delta_{Pg}^{S}}{\Delta^{S}} \qquad (15.4)$$

5 طاقة المرونة

العمل المنجز على تشوه وحدة حجم البلورة يعطي بالعلاقة:

$$d\omega = \sum_{p=1}^{6} \sigma_p \, de_p = \sum_{p,g=1}^{6} C_{pg} e_g de_p \qquad (16.4)$$

باستخدام علاقة طاقة المرونة وقوانين الديناميكا الحرارية يمكن تبيان أن: $C_{pg} = C_{gp}$ أيضا يكون: $S_{pg} = S_{gp}$ أي أن مصفوفتا معاملات المرونة متناظرة وبالتالي سينقص عدد معاملات المرونة المستقلة من 36 إلى 21.

بإجراء التكامل على المعادلة (16.4) نجد كثافة طاقة التشوه:

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{p,g=1}^{6} C_{pg} e_g e_p \qquad (17.4)$$

6 معاملات مرونة البلورات المكعبة

إن عدد معاملات المرونة المستقلة يمكن أن يكون أقل من 21 اعتمادا على تناظر البلورة. فالبلورات ذات الفئة المكعبة توصف بـ 3 معاملات مستقلة فقط.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

ويكون نفس الشكل بالنسبة للمصفوفة $[S_{pg}]$.

حساب المعاملات S_{pg} بدلالة C_{pg}:

$$e_p = \sum_{g=1}^{6} S_{pg}\sigma_g$$

$$= \sum_{g=1}^{6}\sum_{r=1}^{6} S_{pg} C_{gr} e_r$$

$$\Rightarrow \sum_{g=1}^{6} S_{pg} C_{gr} = \delta_{pr} \qquad (18.4)$$

δ_{pr}: رمز كرونكر

نأخذ الحالات التالية:

$$P = 1, r = 1 \Rightarrow S_{11}C_{11} + S_{12}C_{21} + S_{13}C_{31} + S_{14}C_{41} + S_{15}C_{51} + S_{16}C_{61} = 1$$

$$P = 1, r = 2 \Rightarrow S_{11}C_{12} + S_{12}C_{22} + S_{13}C_{32} + S_{14}C_{42} + S_{15}C_{52} + S_{16}C_{62} = 0$$

$$P = 1, r = 4 \Rightarrow S_{41}C_{14} + S_{42}C_{24} + S_{43}C_{34} + S_{44}C_{44} + S_{45}C_{54} + S_{46}C_{64} = 1$$

باستعمال قيم المصفوفتين $[S_{pg}]$ أو $[C_{pg}]$ يكون:

$$S_{11}C_{11} + S_{12}C_{12} + S_{12}C_{12} = 1 \quad (19.4)$$

$$S_{11}C_{12} + S_{12}C_{11} + S_{12}C_{12} = 0 \quad (20.4)$$

$$S_{44}C_{44} = 1$$
$$\Rightarrow S_{44} = \frac{1}{C_{44}} \quad (21.4)$$

بضرب المعادلة (19.4) في C_{12} نجد:

$$C_{12}S_{11}C_{11} + 2S_{12}{C_{12}}^2 = C_{12} \quad (22.4)$$

بضرب المعادلة (20.4) في C_{11} نجد:

$$S_{11}C_{12}C_{11} + S_{12}({C_{11}}^2 + C_{11}C_{12}) = 0 \quad (23.4)$$

$$(22.4) - (23.4) \Rightarrow S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})} \quad (24.4)$$

نعوض S_{12} في العلاقة (19.4) نجد:

$$S_{11} = \frac{C_{11}+C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})} \quad (25.4)$$

ومن العلاقة (17.4) نجد كثافة طاقة المرونة للبلورة المكعبة:

$$\omega = \frac{1}{2}C_{11}({e_1}^2 + {e_2}^2 + {e_3}^2) + \frac{1}{2}C_{44}({e_4}^2 + {e_5}^2 + {e_6}^2) + C_{12}(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3) \quad (26.4)$$

7 معاملات تجريبية لمرونة الأجسام

1.7 معامل يونغ

يصف خواص مرونة الوسط في إتجاه معين، وهو يحدد بنسبة الإجهاد المطبق في ذلك الاتجاه على قيمة التشوه في نفس ذلك الاتجاه.

معامل يونغ باتجاه المحور X:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{e_{xx}} \qquad (27.4)$$

مثال: عند تعرض جسم متجانس ومتماثل المناحي إلى سحب طولي باتجاه oX_3 فإن:

$$E = \frac{\sigma_{33}}{e_{33}}$$

لدينا الإجهاد المطبق هو عبارة عن سحب في الاتجاه oX_3 فإن ممتد الإجهاد يكون:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

باستعمال قانون هوك العلاقة (13.4) من أجل $p = 3$ فإن:

$$\mathrm{e}_3 = \sum_{g=1}^{6} \mathrm{S}_{3g}\sigma_g$$

نجد:

$$e_3 = \mathrm{S}_{31}\sigma_1 + \mathrm{S}_{32}\sigma_2 + \mathrm{S}_{33}\sigma_3 + \mathrm{S}_{34}\sigma_4 + \mathrm{S}_{35}\sigma_5 + \mathrm{S}_{36}\sigma_6$$
$$\Rightarrow \; e_3 = \mathrm{S}_{33}\sigma_3 = \mathrm{S}_{11}\sigma_3$$

ومنه:

$$E = \frac{\sigma_3}{e_3} = \frac{1}{\mathrm{S}_{11}}$$

2.7 معامل بواسن

يحدد نسبة التشوه الانكماشي العرضي على التشوه السحبي الطولي الناتجان عن إجهاد خارجي.

$$\nu = \frac{-\Delta a/a}{\Delta l/l} \qquad (28.4)$$

مثال: عند تعرض جسم متجانس ومتماثل المناحي إلى سحب طولي باتجاه oX_3 فإنه سيعاني تشوه $e_{33}=\frac{\Delta c}{c}$ ويصاحب الزيادة في الطول إلى إنكماش عرضي بإتجاه oX_1 و oX_2 مقداره: $e_{11}=\frac{-\Delta a}{a}$، $e_{22}=\frac{-\Delta b}{b}$ على الترتيب وحيث: $e_{11}=e_{22}$.

$$\nu=\frac{-e_{11}}{e_{33}}=\frac{-e_{22}}{e_{33}}$$

من قانون هوك: $\mathrm{e}_p=\sum_{g=1}^{6}\mathrm{S}_{pg}\sigma_g$ نجد:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_1=\mathrm{S}_{12}\sigma_3 \\ \mathrm{e}_2=\mathrm{S}_{12}\sigma_3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}_1=\mathrm{e}_2 \\ \mathrm{e}_3=\mathrm{S}_{11}\sigma_3 \end{cases}$$

لأنه لدينا سحب طولي $\sigma=\sigma_3$ وباقي عناصر المصفوفة معدومة.

$$\nu=\frac{-e_2}{e_3}=\frac{-e_2}{e_3}=-\frac{S_{12}}{S_{11}}$$

3.7 معامل الانضغاط الحجمي

هو النقصان النسبي لحجم البلورة تحت تأثير ممتد إجهاد الكبس الهيدروستاتيكي:

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}-\Delta P & 0 & 0\\ 0 & -\Delta P & 0\\ 0 & 0 & -\Delta P\end{bmatrix}$$

أي:

$$\sigma_{ij}=-\Delta\mathrm{P}\delta_{ij} \qquad (i,j=1,2,3)$$

δ_{ij}: رمز كرونكر

لدينا:

$$B = \frac{-\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$\mathrm{e}_{ij} = \sum_{l,m=1}^{3} \mathrm{S}_{ijlm}\sigma_{lm} = \sum_{l,m=1}^{3} \mathrm{S}_{ijlm}(-\Delta P)\delta_{lm}$$

ومنه:

$$\mathrm{e}_{ij} = \sum_{l,l=1}^{3} \mathrm{S}_{ijll}(-\Delta P)$$

$$\mathrm{e}_{ii} = \sum_{l,l=1}^{3} \mathrm{S}_{iill}(-\Delta P)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{e}_{ii} = -\Delta P \sum_{i,l=1}^{3} S_{iill}$$

ومنه يكون:

$$B = \frac{-\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{\sum_{i,l=1}^{3} \mathrm{S}_{iill}}$$