2.اختبار الفروض حول الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

2–1. عندما يكون المجتمعين طبيعيين وتباينهما معلومين :

إذا كان $\bar{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **معلوم**، وكان $\bar{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **معلوم** أيضا. فان إحصاء الاختبار المناسبة هي: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

أما القيمة المجدولة فتحدد وفق الحالات التالي:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (04): أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي تباينه 9 فوجد أن وسطها الحسابي 69، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول تباينه 25 فوجد أن وسطها الحسابي 71.

المطلوب: أختبر الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى المعنوية 0.05.

الحل:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون: $z_{0.975} = 1.96$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $|Z_c| < 1.96$

والآن نقوم بحساب Z_c من خلال المعادلة التالية: $Z_c \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

أي : $$Z_c = \frac{(69-71)-0}{\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{25}{20}}} = -1.486$$

نلاحظ أن : $|-1.486| < 1.96$ ؛ أي أن قيمة Z_c تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن وسطي المجتمعين متساويين عند مستوى المعنوية 0.05.

2-2.عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين.

1) تبايني المجتمعين مجهولين وحجم العينتين كبير بدرجة كافية:

إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **كبير** تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **مجهول**، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى حجمها n_2 **كبير** أيضا مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **مجهول** أيضا. فان إحصاء الاختبار المناسب هو: $Z_c \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-d_0}{\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1}+\frac{s'^2_2}{n_2}}}$

أما القيمة المجدولة فتحدد وفق الحالات التالي:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (05): أخذت عينة عشوائية من مجتمع معين، وكان حجمها 50 ، ووسطها الحسابي 57.5 وانحرافها المعياري 6.2 ، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع آخر، وكان حجمها 60 ، ووسطها الحسابي 54.4 وانحرافها المعياري 10.6 .

المطلوب: هل نستطيع أن نستنتج أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى الدلالة 0.05 .

الحل: نريد اختبار ما يلي :

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > 0$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد، إذن القيمة الحرجة هي: $z_{0.95} = 1.64$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $Z_c > 1.64$

والآن نقوم بحساب Z_c من خلال المعادلة التالية : $Z_c=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-d_0}{\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1}+\frac{s'^2_2}{n_2}}}$

فنجد: $$Z_c=\frac{(57.5-54.4)-0}{\sqrt{\frac{(6.2)^2}{50}+\frac{(10.6)^2}{60}}}=1.908$$

نلاحظ أن $1.908>1.64$ أي أن قيمة Z_c تقع في منطقة رفض H_0، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 ؛ وعليه نستنتج أن هناك دليلا كافيا على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية 0.05.

2) عندما يكون المجتمعين طبيعيين وتباينهما مجهولين والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم:

وفي هذا العنصر لدينا حالتين:

- حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.
- حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

أ. **حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.**

إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكان **تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T_c=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

أما القيمة المجدولة فتحدد وفق الحالات التالي:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$\lvert T_c\rvert< t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$
	$\mu_1-\mu_2< d_0$	$T_c>-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$
	$\mu_1-\mu_2> d_0$	$T_c< t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$

مثال (06): قدمت مؤسستين من المؤسسات المنتجة للآلات عرضين ، يتضمن كل عرض طريقة معينة للإنتاج ، وانعكس ذلك في الزمن اللازم لإنتاج الوحدة من المنتج ، ولقياس متوسط هذا الزمن للآلتين تم قياس الزمن لعدد 5 وحدات من الآلة الأولى ، و6 وحدات من الآلة الثانية وكانت كما يلي:

الطريقة الأولى (الزمن بالدقيقة)	2	4	9	3	2
الطريقة الثانية (الزمن بالدقيقة)	3	7	5	8	4	3

المطلوب: اختبار الفرض القائل بعدم وجود فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0.01، مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

الحل:

قبل اختبار الفرضية السابقة يجب أولا حساب ما يلي : $\bar{X}_1$ ، $\bar{X}_2$، s'^2_1، s'^2_2، s^2_p

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد أن :

$$\bar{X}_1 = 4 \quad , \quad \bar{X}_2 = 5 \quad , \quad s'^2_1 = 8.5 \quad , \quad s'^2_2 = 4.4 \quad , \quad s'^2_p = 6.22$$

وعليه فان اختبار الفرضية السابقة يتم وفقا للخطوات التالية :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.01$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون: = = 3.250

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} = t_{(0.995,9)} = 3.250$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان: $|T_c| < 3.250$

والآن نقوم بحساب T_c من خلال المعادلة التالية: $T_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{s^2_p(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

أي :

$$T_c = \frac{(4-5)-0}{\sqrt{6.22(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}} = -0.662$$

نلاحظ أن : $|-0.662| <$ -3.250 ؛ أي أن قيمة T_c تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 ، ومنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0.01 .

ب. حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين

إذا كان $\bar{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكان $\bar{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكان **تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين**، فان إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2}\right)}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s'^2_1}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{s'^2_2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}} \right)$$

أما القيمة المجدولة فتحدد وفق الحالات التالي:

نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت	H_1	H_0
$\lvert T_c \rvert < t_{1-\frac{\alpha}{2},v}$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$
$T_c > -t_{1-\alpha,v}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$	
$T_c < t_{1-\alpha,v}$	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$	

مثال (07) : لنفرض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين لكل منهما توزيع طبيعي

فوجدنا النتائج الآتية: $\bar{X}_1 = 32 \quad , \quad \bar{X}_2 = 30.2$

$$= 7 \ , \ n_2 = 6 \quad , \ s_1^2 = 4.470 \quad , \quad s_2^2 = 0.652 n_1$$

المطلوب: أختبر الفرضية $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$ مقابل الفرضية $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

عند مستوى المعنوية 0.05 ، وكان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

الحل:

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، ومنه فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، ومن أجل إيجاد القيم الحرجة، يجب أولا تحديد قيمة درجة الحرية ، حيث :

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}} \right) = \left(\frac{\left(\frac{4.470}{7} + \frac{0.652}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.470}{7}\right)^2}{(6)} + \frac{\left(\frac{0.652}{6}\right)^2}{(5)}} \right) \approx 8$$

ومنه تكون القيم الحرجة كما يلي:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.975,8)} = 2.306$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $|T_c| < 2.306$ T

والآن نقوم بحساب T_c من خلال المعادلة التالية : $T_c = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})}}$

أي :

$$T_c = \frac{(32 - 30.2) - 0}{\sqrt{(\frac{4.470}{7} + \frac{0.652}{6})}} = 2.08$$

نلاحظ أن: $|2.08| < 2.306$ ؛ أي أن قيمة T_c تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 ، ومنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 0.05.