3. اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينه σ^2 ، وأردنا إجراء اختبارات حول المعلمة σ^2 ، فان إحصاء الاختبار المناسب في هذه الحالة هو الإحصاء الذي يعتمد على أفضل مقدر للمعلمة σ^2 وهو S'^2 ، وهذا الإحصاء هو المتغير العشوائي χ^2 ، حيث:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2}$$

أما القيمة الحرجة (القيمة المجدولة) فهي تحدد وفق كل حالة من الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$\mu = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi_c < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$
	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_c > \chi^2_{\alpha,n-1}$
	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_c < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$

مثال (09): يدعى مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الانحراف المعياري لأطوالها عن 0.2 سم . أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الإدعاء ، فأخذ عينة عشوائية مكونة من 10 منتجات فوجد أن الانحراف المعياري فيها كان 0.4 سم .

المطلوب: هل تعطينا هذه النتيجة مبررا قويا لرفض إدعاء البائع مستخدما في ذلك مستوى الدلالة 0.05

الحل:

$$H_0:\ \sigma^2=0.04$$
$$H_1:\ \sigma^2>0.04$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ، إذن القيمة الحرجة يتم إيجادها كما يلي:

$$\chi^2_{(1-\alpha,n-1)} = \chi^2_{(0.95,9)} = 16.919$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $16.919 > \chi_c$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار:

$$\chi_c = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.16}{0.04} = 36$$

بما أن: $36 > 16.919$ فإننا نرفض الفرض العدمي H_0 ونقبل الفرض البديل عند مستوى الدلالة 0.05؛ أي أن هذه النتيجة تعطينا مبررا قويا لرفض إدعاء البائع وبالتالي فإن الانحراف المعياري يزيد عن 0.2 سم.

4 . اختبار الفروض حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية حجمها n_1 ، وكان تباينها s'^2_1 ، ثم سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 ، وكان تباينها s'^2_2 ، وأردنا إجراء اختبار خاص بمقارنة σ_1^2 و σ_2^2 ، فان إحصاء الاختبار المناسب هي:

$$\mathrm{F} = \frac{{s'}_1^2 / {s'}_2^2}{d_0}$$

أما القيمة الحرجة فتحدد وفق الحالات التالية:

نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت	H_1	H_0
$F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} < F_c < F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} \neq d_0$	$\mu = \sigma_0^2$
$F_c > F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} < d_0$	
$F_c < F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} > d_0$	

مثال (10): إذا علمت أن مجتمع طول الطالبات ، ومجتمع طول الطلبة في جامعة محمد خيضر ، يتوزع توزيعا طبيعيا ، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 25 طالبة ، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها 21 طالبا ، وكانت العينتان مستقلتان ، ووجدنا أن مقدر تباين طول الطالبات يساوي 64 ، ومقدر تباين طول الطلبة يساوي 36 .

المطلوب: اختبر ما إذا كان هناك فرق بين تباين مجتمع طول الطالبات وتباين مجتمع طول الطلبة ، وذلك باستخدام مستوى معنوية 0.05 .

الحل:

نريد اختبار ما يلي:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \mathrm{H}_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \mathbf{1} \\ H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \mathbf{1} \end{cases}$$

$$\mathrm{H}_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.975,24,20)} = 2.4$$

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.025,24,20)} = 0.43$$

نقبل H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كانت : $0.43 < F_c > 2.40$

ومن ثم فان منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و 2.40

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار: $F_c = \frac{s'^2_1}{s'^2_2} \cdot \frac{\sigma^2_2}{\sigma^2_1} = \frac{64}{36} = 1.78$

نلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار F_c تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية ،إذن القرار هو قبول H_0 ورفض الفرضية البديلة عند مستوى الدلالة 0.05 ؛ ومنه الاختبار ليس له معنوية إحصائية؛ أي أن تباين مجتمع طول الطالبات يساوي تباين مجتمع طول الطلبة ولا يوجد فرق حقيقي بينهما، والفرق الظاهر بين تبايني العينتين هو فرق ليس ذو أهمية ، وسببه خطأ الصدفة.

5. اختبار الفرضيات حول النسبة P في المجتمع:

إذا كانت ($x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$) عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يخضع لتوزيع ذي الحدين ، وكان حجم هذه العينة **كبير**، وأردنا اختبار فرضيات حول نسبة المجتمع فإن احصاءة الاختبار في هذه الحالة هي:

$$Z_c = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}}$$

أما القيمة الحرجة فتتحدد وفق الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$p < p_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$p > p_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (12): مصنع للأدوية المسجلة يدعي أن دواء من إنتاجه له فعالية بنسبة 90 % في التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات. في عينة مكونة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم .

المطلوب: قرر ما إذا كان إدعاء المصنع صحيحا مستخدما في ذلك مستوى معنوية 0.01.

الحل :

بفرض أن P هو احتمال أن يؤدي الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية وبهذا نريد اختبار الفرضيتين:

$H_0: P = 0.9$ الادعاء صحيح

$H_1: P < 0.9$ الادعاء باطل

$$\alpha = 0.01$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر، إذن القيمة الحرجة هي : $-2.33 = -z_{0.99}$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان : $Z_c < -2.33$

والآن نقوم بحساب Z_c من خلال المعادلة التالية: $Z_c = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}}$

فنجد: $$Z_c = \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{200}}} = -4.71$$

نلاحظ أن $-4.71 < -2.33$ أي أن قيمة Z_c تقع في منطقة قبول الفرض البديل، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.01، بعبارة أخرى نجد أن ادعاء المصنع غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية.

6. اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي المجتمعين:

إذا أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من توزيع ذي الحدين وكان حجمهما n_1 و n_2 كبير بدرجة كافية. فإذا أردنا اختبار فروض حول فرق نسبتي المجتمعين فتكون احصاءة الاختبار في هذه الحالة هي:

$z_c = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$ إذا كان $d_0 \neq 0$ و

$z_c = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{p\, q(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$ إذا كان $d_0 = 0$ مع $P = \frac{n_1 \bar{p}_1 + n_2 \bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

والقيمة الحرجة وفق الحالات التالية:

H_0	H_1	نقبل H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت
$p_1 - p_2 \neq d_0$	$p_1 - p_2 \neq d_0$	$\lvert Z_c \rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$p_1 - p_2 < d_0$	$Z_c > -z_{1-\alpha}$
	$p_1 - p_2 > d_0$	$Z_c < z_{1-\alpha}$

مثال (14): من أجل المقارنة بين نسبة المدخنين في الفئة العمرية (18-25) سنة مع الفئة العمرية (26-30) سنة، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 من الفئة الأولى فوجد أن 80 منهم يدخنون وأخذت عينة عشوائية مستقلة عن الأولى من الفئة العمرية الثانية وحجمها 100 فوجد أن 52 منهم يدخنون .

المطلوب : اختبر الفرضية: $H_0 : P_1 = P_2$ مقابل الفرضية $H_1 : P_1 < P_2$ عند مستوى الدلالة 0.05.

الحل:

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$
$$H_1 : P_1 - P_2 < 0$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر، إذن القيمة الحرجة هي:

$$-z_{0.95} = -1.65$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $Z_c < -1.65$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار Z_c من خلال المعادلة التالية: $z_c = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{p\ q(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

يجب أولا إيجاد ما يلي: $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ و P

$$\bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$\bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{52}{100} = 0.52$$

$$P = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{80 + 52}{200 + 100} = 0.44$$

ومن هنا نجد إحصاء الاختبار يساوي:

$$z_c = \frac{0.4 - 0.52}{\sqrt{(0.44)(0.56)*\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)}} = -1.97$$

نلاحظ أن $-1.97 < -1.65$ أي أن قيمة z_c تقع في منطقة رفض الفرضية H_0 ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ، ومنه نجد أن نسبة المدخنين في الفئة العمرية الأولى اقل من نسبة المدخنين في الفئة العمرية الثانية.