حل التمرين التمهيدي:

1- ايجاد توزيع المعاينة للمتوسط.

بما أن السحب تم دون ارجاع وحجم كل عينة هو ثلاث عناصر فإن عدد العينات الممكن سحبها هو توفيقة بدون تكرار، أي

$$c_N^n = c_{10}^3 = \frac{10!*3!}{(10-3)}=10$$

الجدول الموالي يوضح هذه العينات ومتوسطاتها.

رقم العينة	عناصر العينة	المتوسط العينات $\bar{x}_i$
1	4 7 5	5.333
2	1 7 5	4.333
3	2 7 5	4.667
4	1 4 5	3.333
5	2 4 5	3.667
6	2 1 5	2.667
7	1 4 7	4.000
8	2 4 7	4.333
9	2 1 7	3.333
10	2 1 4	2.333

نلاحظ ان المتغير العشوائي متوسط العينات يأخذ مجموعة من القيم وبتكرارات مختلفة، وبالتالي التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينات يعطى في الجدول الموالي:

$\bar{x}_i$	2.333	2.667	3.333	3.667	4.000	4.333	4.667	5.333	
$p(\bar{x}_i)$	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	1
$\bar{x}_i * p(\bar{x}_i)$	0.233	0.267	0.667	0.367	0.400	0.867	0.467	0.533	3.8
${\bar{x}_i}^2 * p(\bar{x}_i)$	0.544	0.711	2.222	1.344	1.600	3.756	2.178	2.844	15.2

- أيجاد المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط؟

إيجاد المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للمتوسط.

$$E(\bar{x}) = \bar{x}_i * p(\bar{x}_i) = 3.8$$

أيجاد الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط؟

$$V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - E(\bar{x})^2$$

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})}$$

حيث:

$$E(\bar{x}^2) = \bar{x}_i{}^2 * p(\bar{x}_i)$$
$$= 2.333^2 * 0.1 + 2.667^2 * 0.1 + 3.333^2 * 0.2 + 3.337^2 * 0.1 + 4^2 * 0.1 + 4.333^2 * 0.2 + 4.667^2 * 0.1 + 5.333^2 * 0.1 = 15.2$$

ومنه:

$$V(\bar{x}) = 15.2 - 3.8^2 = 0.76$$

أي:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{0.76} = 0.872$$

2- حساب احتمال أن نسحب عينة يكون متوسطها محصور بين 3.3 و4.

$$p(3.33 < \bar{x}_i < 4) = p(\bar{x}_i = 3.334) + p(\bar{x}_i = 3.337) + p(\bar{x}_i = 4) + p(\bar{x}_i = 4.333)$$
$$= 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.6$$

3- بحساب نفس الاحتمال السابق حالة التوزيع الطبيعي.

$$\bar{x} \rightsquigarrow N(3.8; 0.76)$$

$$p(3.33 < \bar{x}_i < 4.6) = p\left(\frac{3.33-3.8}{0.872} < \bar{x}_i < \frac{4.6-3.8}{0.872}\right) = p(-0.539 < \bar{x}_i < 0.918)$$
$$= p(\bar{x}_i < 0.918) - p(\bar{x}_i < -0.539)$$
$$= p(\bar{x}_i < 0.918) - \left(1 - p(\bar{x}_i < 0.539)\right) = 0.8212 - (1 - 0.7051)$$
$$= 0.5263$$

حل التمرن الثاني.

- نفترض الان تباين المجتمع مجهول وتقديره من العينة يساوي 0.9796كغ 2وان انتاج المصنع اليومي يساوي 800علبة، فأحسب احتمال أن يكون متوسط وزن العبوة في العينة المسحوبة أكبر أو يساوي 970 غ؟

- أحسب نفس الاحتمال السابق إذا كان حجم انتاج المصنع هو 8000علبة في اليوم؟

معطيات التمرين:

المعطيات العامة للتمرين $n = 49, \quad \mu = 1$

1. حساب $p(0.970 \leq \bar{x} \leq 0.990)$

$$\sigma^2 = 1.1$$

$\bar{x}$ عبارة عن متغير عشوائي توزيعه يقترب من التوزيع الطبيعي؛ لأن حجم العينة كبير، حيث:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 1$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1.1}}{\sqrt{49}} = 0.15$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 1}{0.15} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه:

$$p(0.970 \leq \bar{x} \leq 0.990) = p(\frac{0.970-1}{0.15} \leq \frac{\bar{x}-1}{0.157} \leq \frac{0.990-1}{0.15}) = p(-0.2 \leq z \leq -0.067)$$
$$= p(Z \leq -0.067) - p(Z \leq -0.2) = \left(1 - p(Z \leq 0.067)\right) - \left(1 - p(Z \leq 0.2)\right)$$
$$= p(Z \leq 0.2) - p(Z \leq 0.067) = 0.5793 - 0.5268 = 0.0525$$

2- حساب احتمال أن يكون متوسط وزن العبوة في العينة المسحوبة أكبر أو يساوي 970 غ

$\bar{x}$ عبارة عن متغير عشوائي توزيعه يقترب من التوزيع الطبيعي؛ لأن حجم العينة كبير،

سوف نتحقق من شرط استعمال معامل التصحيح في حساب التباين $(0.05 * \mathrm{N} < \mathrm{n})$

وبما أن $0.05 * \mathrm{N} = 0.05 * 800 = 40 < 49$ بالتالي نستعمل معامل التصحيح.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 1$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{0.9796}}{\sqrt{49}}\sqrt{\frac{800-49}{800-1}} = 0.137$$
$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s'}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\bar{x}-1}{0.137} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه:

$$p(\bar{x} \geq 0.970) = p\left(\frac{\bar{x}-1}{0.137} \geq \frac{0.970-1}{0.137}\right) = p(z \geq -0.219) = p(Z \leq 0.219) = 0.5871$$