حل التمرين الثالث:

معطى:

المجتمع طبيعي ، $\mu = 48kg$ ، $\sigma = 03$ ، $n = 25$

عدد العينات 08.

1/ تحديد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط.

بما أن تباين المجتمع معلوم والمجتمع طبيعي فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعي أي:

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 48$

$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = \frac{03}{\sqrt{25}} = 0,6$

$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-48}{03/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$

2/ حساب احتمال أن يكون متوسط وزن الخروف في العينة محصور بين $46,8kg$ و $48,3kg$

$P(46,8 < \bar{X} < 48,3) = P\left(\frac{46,8-48}{0,6} < Z < \frac{48,3-48}{0,6}\right)$

$= P(-2 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -2)$

$= P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 2)) = 0,6915 - (1 - 0,9772)$

$= 0,6687$

$$\boxed{P(46,8 < \bar{X} < 48,3) = 0,6687}$$

حل التمرين الرابع:

معطى: المجتمع طبيعي، $\mu = 5cm$ ، $\sigma = 0,005$ ، $n = 09$

المعلوم:

1/ تحديد توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$:

بما أن المجتمع طبيعي والانحراف المعياري معلوم فإن التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي أي:

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 5cm$

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,005/\sqrt{9} = 0,0017$

$Z = \frac{\bar{x}-5}{0,0017}$

2/ حساب $P(\bar{X} > 5,004)$

$P(\bar{X} > 5,004) = P\left(Z > \frac{5,004-5}{0,0017}\right) = P(Z > 2,35)$

$= 1 - P(Z < 2{,}35) = 1 - 0{,}9906 = 0{,}0094$

- تحديد حجم العينة التي يكون الخطأ المعياري لـ $\bar{x}$ يساوي 0,001

$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}005}{\sqrt{n}} = 0{,}01 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0{,}005}{0{,}001} = 5 \Rightarrow \boxed{n = 25}$

/4

الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي يعبر عن مدى تشتت متوسط العينات، بالتالي كلما كان التشتت كبير يكون في احتمال أن كل عينة يكون متوسطها يبتعد عن متوسط المجتمع وبالتالي تصبح هذه العينة لا تمثل المجتمع الذي تمثل لذلك كلما صغر التباين كانت أحسن، لذلك يكون الخطأ المعياري في الحالة الثانية أحسن من الحالة الأخرى

حل التمرين الرابع:

معطى

$\mu = 135 \quad \sigma = 14$

المطلوب: ما هو احتمال نسبة الصناديق التي تحمل حتى يرفض الصندوق يجب أن يكون وزنه أقل من 6240 فإذا علمنا أن كل صندوق يحوي 48 علبة، وفرضنا أوزان كل علبة بـ $x_1, x_2, \dots, x_{48}$ يصبح الصندوق بوزن $\sum_{i=1}^{48} x_i$

وعليه احتمال رفض الصندوق هو $P(\sum x_i < 6240)$

ومنه

$P(\sum_{i=1}^{48} x_i < 6240) = P\left(\frac{\sum x_i}{48} < 6240/48\right) = P(\bar{x} < 130)$

$\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي لأن حجم العينة المسحوبة (الصندوق يحوي على 48 علبة).

ومنه

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 135$

$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 14/\sqrt{48} = 2{,}021$

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 135}{2{,}021} \sim N(0, 1)$

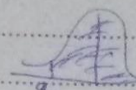
ومنه

$P(\bar{x} < 130) = P\left(Z < \frac{130 - 135}{2{,}021}\right) = P(Z < -2{,}474)$

$= 1 - P(Z < 2{,}47) = 1 - 0{,}9932 = 0{,}0068$

احتمال رفض صندوق هو 0,0068.

حل التمرين 05

1/ حساب  $P(T_{12} > a) = 0,975$

بما أن المساحة الموجودة على يمين القيمة a أكبر من 0,5 فإن القيمة a سالبة

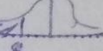
وبالتالي

$P(T_{12} > a) = P(T_{12} < -a) = 0,975$

نحصل من الجدول ستودنت نجد

$-a = 2,18 \Rightarrow \boxed{a = -2,18}$

2/ حساب $P(T_{10} < a) = 0,05$

بما أن المساحة على يسار القيمة a أقل من 0,5 فإن القيمة a سالبة  ومنه

$P(T_{10} < a) = 1 - P(T_{10} < -a) = 0,05 \Rightarrow P(T_{10} < -a) = 0,95$

من جدول ستودنت نجد

$-a = 1,81 \Rightarrow \boxed{a = -1,81}$

حل التمرين 06 :

معطى : $u = 55$ , $n = 25$ , $s' = 10$ ( مقدر الانحراف )

المطلوب : $P(\bar{X} > 60)$

$\bar{X}$ م ع تتوزع بشكل قريب من توزيع ستودنت لأن المجتمع طبيعي والانحراف المعياري مجهول وحجم العينة صغير ، ومنه

$u_{\bar{x}} = u = 55$

$S_{\bar{x}} = \frac{s'}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$

$t = \frac{\bar{x} - 55}{2} \sim T_{25-1}$

ومنه

$P(\bar{X} > 60) = P\left(\frac{\bar{X} - 55}{2} > \frac{60 - 55}{2}\right) = P(T_{24} > 2,5) =$

$1 - P(T_{24} < 2,5) = 1 - 0,99 = 0,01$

احتمال أن يزيد متوسط وزن البيضة في العينة هو 0,001

حل التمرين 07 :

تحل بنفس الطريقة

حل التمرين 08 :

معطى : $u = 0,6$ , $n = 16$ , $s' = 0,175$

المطلوب : $P(\bar{X} > 0,75)$ ، تحل بنفس الطريقة

$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) \sim N(2,\ 0{,}88)$ ومنه

$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<3) = P\left(T_{38} < \frac{3-2}{0{,}88}\right) = P(T_{38}<-1{,}14) = 0{,}8$ ومنه

حل التمرين 12

معطى:

| ع2 | ع1 |
|---|---|
| $n_2 = 9$ | $n_1 = 16$ |
| $\mu_2 = 74$ | $\mu_1 = 70$ |
| $s'_2 = 16$ | $s'_1 = 12$ |

المطلوب $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2 \geq 8)$

بما أن $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ توزيعه يقترب من توزيع ستودنت (T) لأن حجم العينتين صغير والمجتمعين طبيعيين وتبايناهما مجهولين وعليه:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1-\mu_2 = 70-74 = -4$$

$$\delta_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1}+\frac{s_2'^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{12^2}{16}+\frac{16^2}{9}} = \sqrt{37{,}44} = 6{,}11$$ ومنه

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1}+\frac{s_2'^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+4}{\sqrt{37{,}4}} \sim T_V$$

$$V = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{n_1}+\frac{s_2'^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1'^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2'^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{12^2}{16}+\frac{16^2}{9}\right)^2}{\frac{(12^2/16)^2}{15}+\frac{(16^2/9)^2}{8}} \simeq 14$$

ومنه $P\left(T_{14} \geq \frac{8+4}{6{,}11}\right) = P(T_{14}>1{,}96) = 1-P(T_{14}<1{,}96)$

$= 1-0{,}975 = 0{,}025$

حل التمرين 09

معطى

| م ع 2 (المصابيح B) | م ع 1 (المصابيح A) |
|---|---|
| $u_2 = 1200$ | $u_1 = 1400$ |
| $\delta_2 = 100$ | $\delta_1 = 200$ |
| $n_2 = 125$ | $n_1 = 125$ |
| $\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1$ |

المطلوب: $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 250)$

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ م ع تتوزع تقريبا من التوزيع الطبيعي لأن $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$

حيث

$$u_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = u_1 - u_2 = 1400 - 1200 = 200$$

$$\delta_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\delta_1^2/n_1 + \delta_2^2/n_2} = \sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}} = 20$$

ومنه $Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 200}{20}$

ومنه $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 250) = P\left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 200}{20} > \frac{250 - 200}{20}\right)$

$= P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$

بالتالي: احتمال أن يزيد الفرق بين متوسط عمر النوعين

للمصابيح 0,0062.

حل التمرين 10: يحل بنفس الطريقة

حل التمرين رقم 11:

معطى

| م ع 2 | م ع 1 |
|---|---|
| $n_2 = 22$ | $n_1 = 18$ |
| $u_2 = 33$ | $u_1 = 35$ |
| $s_2'^2 = 9$ | $s_1'^2 = 6$ |
| $\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1$ |

المطلوب: $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 3)$

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ م ع تتوزع تقريبا من ستودنت لأن حجم العينتين صغير وتباين المجتمعين مجهول: ومنه

$$u_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = u_1 - u_2 = 35 - 33 = 2$$

$$\delta_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{7,66} \times \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{22}} = 0,88$$

حل التمرين 13:

المعطيات: $\sigma = 0,5$ , $\mu = 1,5$ , $n = 16$

المطلوب: $P(S'^2 > 0,64)$

$S'^2$ متغير عشوائي تتوزع تقريبا من توزيع ~~كاي~~ كاي مربع $(\chi^2_{n-1})$

حيث

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{(n-1)}$$

$$\chi^2 = \frac{(16-1)S'^2}{0,5^2} = 60S'^2 \rightsquigarrow \chi^2_{15}$$

ومنه

$$P(S'^2 > 0,64) = P(60S'^2 \geq 60 * 0,64)$$

$$= P(\chi^2_{15} \geq 38,4) = 1 - P(\chi^2_{15} \leq 38,4) = 1 - 0,99$$

$$= 0,01$$

حل التمرين 15:

$n_1 = 11$ , $n_2 = 16$

المطلوب:

$$P\left(\frac{S_1'^2 / S_2'^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq 3,80\right) = ?$$

لدينا التوزيع $S_1'^2 / S_2'^2$ يقترب من توزيع فيشر Fricher

حيث

$$F = \frac{S_1'^2 / S_2'^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

أي

$$P\left(\frac{S_1'^2 / S_2'^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq 3,8\right) = P(F(10,15) \geq 3,8) =$$

$$1 - P(F(10,15) \leq 3,8) = 1 - 0,99 = 0,01$$

حل التمرين 16

معطى

$q = 0,6$ ، $P = 0,4$ $n = 100$

تحديد توزيع الحالة للسنة العينة

$\mu_{\bar{p}} = P = 0,4$

$$S_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,4 * 0,6}{100}} = 0,05$$

هل يمكن تقريب توزيع الحالة للسنة إلى توزيع الطبيعي

شروط التقريب

$np \geq 5 \Rightarrow 100 \times 0,4 = 40 > 5$

$nq \geq 5 \Rightarrow 100 \times 0,6 = 60 > 5$

إذن يمكن تقريب توزيع $\bar{p}$ إلى التوزيع الطبيعي حيث

$$Z = \frac{\bar{p} - 0,4}{0,05} \rightsquigarrow N(0,1)$$

حل التمرين 17:

معطى $n = 50$ $P = 0,9$

المطلوب: $P(\bar{p} \geq 0,8)$

$\bar{p}$ هو المتغير العشوائي دقة يمكن تقريب من التوزيع الطبيعي

لأن

$np = 50 * 0,9 = 45 \geq 5$

$nq = 50 \times 0,1 = 5 \geq 5$

حل التمرين 17

لدينا عينة $n=50$ (أي يتحقق شرط التقريب) $p=0{,}9$

$q=0{,}1$

المطلوب $P(\bar{p}>0{,}8)$

$\bar{p}$ متغير عشوائي توزيعه يقترب من التوزيع الطبيعي إذا كان $np\geq 5$ , $nq\geq 5$

لدينا $np=50\times 0{,}9=45\geq 5$ , $nq=50\times 0{,}1=5\geq 5$

ومنه

$$\mu_{\bar{p}}=p=0{,}9$$

$$\sigma_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{50}}=0{,}042$$

ومنه

$$Z=\frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\bar{p}-0{,}9}{0{,}042}\rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه

$$P(\bar{p}>0{,}8)=P\left(\frac{\bar{p}-0{,}9}{0{,}042}\geq\frac{0{,}8-0{,}9}{0{,}042}\right)=$$

$$P(Z\geq -2{,}38)=P(Z<2{,}38)=0{,}9913$$

حل التمرين 18:

$N=8703$ , $x_{\text{ذكور}}=3352 \Rightarrow p=\frac{8703}{3352}=0{,}38$

لدينا $np=\cancel{3355}\,55\times 0{,}38=20{,}9\geq 5$ , $nq=55\times 0{,}62=34{,}1\geq 5$

المطلوب $P(\bar{p}>0{,}5)$

$\bar{p}$ متغير عشوائي توزيعه يقترب من التوزيع الطبيعي لـ $\mu$

$$\mu_{\bar{p}}=p=0{,}38$$

$$\sigma_{\bar{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}38\times 0{,}64}{55}}=0{,}065$$

$$Z=\frac{\bar{p}-0{,}38}{0{,}065}\rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه

$$P(\bar{p}>0{,}5)=P\left(\frac{\bar{p}-0{,}38}{0{,}065}>\frac{0{,}5-0{,}38}{0{,}065}\right)=P(Z\geq 1{,}85)$$

$$=1-P(Z<1{,}85)=1-0{,}9678=0{,}0322$$

حل التمرين 20 :

المعطيات :

$n_1 = 30,\ P_1 = 0{,}7 \Rightarrow q_1 = 0{,}3$

$n_2 = 45,\ P_2 = 50 \Rightarrow q_2 = 0{,}5$

المطلوب = حساب $P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \geq 0{,}2)$

$(\bar{P} - \bar{P})$ متغير عشوائي له

$$U_{\bar{P}_1 - \bar{P}_2} = P_1 - P_2 = 0{,}7 - 0{,}50 = +0{,}20$$

$$S_{\bar{P}_1 - \bar{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}7 \times 0{,}3}{30} + \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{45}} = 0{,}11$$

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2 - 0{,}2}{0{,}11} \sim N(0,1)$$

بما أن حجم العينتين كبير فإن

ومنه

$$P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \geq 0{,}2) = P\left(\frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2 - 0{,}2}{0{,}11} \geq \frac{0{,}2 - 0{,}2}{0{,}11}\right)$$

$$= P(Z \geq 0) = 0{,}5.$$

باقي التمارين بنفس طريقة حل التمرين 20.