2013

IV البنى الجبرية

1- الزمر :

تعريف : نقول أن $(G,*)$ زمرة إذا كانت G مزودة بعملية تركيب $*$ والتي تحقق ما يلي :

1- $*$ عملية تركيب داخلي

$$\forall x,y \in G : x*y \in G$$

2- $*$ تجميعية

$$\forall x,y,z \in G : (x*y)*z = x*(y*z)$$

3- G لديها عنصر حيادي e بالنسبة للعملية $*$.

$$\exists e\in G : \forall x \in G : \begin{cases} x*e = x & \text{حيادي من اليمين} \\ e*x = x & \text{حيادي من اليسار} \end{cases}$$

4- كل عنصر x من G نظير x^{-1} أي :

$$\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G : \begin{cases} x^{-1}*x = e \\ x*x^{-1} = e \end{cases}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت العملية $*$ تحقق

$$\forall x,y \in G : x*y = y*x$$

فإننا نقول أن $(G,*)$ زمرة تبديلية (آبلية)

ملاحظة : في الزمرة العنصر الحيادي والعنصر النظير وحيدان

مثال : $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ، $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ و $(\mathbb{C}^*,\times)$ ، $(\mathbb{Z},+)$ ، $(\mathbb{C},+)$ ، $(\mathbb{R},+)$ عبارة عن زمر تبديلية

$(\mathbb{Z}^*,\cdot)$ ليست زمرة لأن مثلا 2 ليس لديه نظير في $\mathbb{Z}^*$ ، $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^*$ وكذلك $(\mathbb{N},+)$

لتكن $(G,*)$ زمرة . من أجل كل $x\in G$ ، نرمز لـ $x*x$
بـ x^2 و $x*x*x$ بـ x^3 ، بصفة عامة

$$x^n = \underbrace{x*x*\dots*x}_{n \text{ fois}}$$
$$x^0 = e$$
$$x^{-n} = \underbrace{x^{-1}*x^{-1}*\dots*x^{-1}}_{n \text{ fois}}$$

حيث x^{-1} هو نظير x بالنسبة للعملية $*$
لدينا إذن

1) $x^m * x^n = x^{m+n}$
2) $(x^m)^n = x^{mn}$
3) $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

إذا كانت $(G,*)$ تبديلية فإن

$$(x*y)^n = x^n * y^n$$

الزمرة الجزئية :
لتكن $(G,*)$ زمرة
تعريف ، نقول عن مجموعة $H\subset G$ أنها زمرة جزئية من G إذا كان

1) $e\in H$
2) من أجل كل $x,y\in H$ فإن $x*y\in H$
3) من أجل كل $x\in H$ ، فإن $x^{-1}\in H$

ملاحظة : H زمرة جزئية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

1) $H \neq \emptyset$

2) من أجل كل $x, y \in H$ فإن $x * y^{-1} \in H$

مثال :

$(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

بالفعل

- $1 \in \mathbb{R}_+^*$
- إذا كان $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$
- إذا كان $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$

الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}$:

قضية : الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ هي من الشكل $n\mathbb{Z}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي مجموعة مضاعفات n

$$n\mathbb{Z} = \{kn \ / k \in \mathbb{Z}\}$$

البرهان : لنثبت أنه من أجل $n \in \mathbb{Z}$. لدينا $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

بالفعل

- العنصر الحيادي 0 ينتمي إلى $n\mathbb{Z}$
- من أجل كل $x = kn$ و $y = k'n$ من $n\mathbb{Z}$ فإن $x + y = (k+k')n$ هو أيضا عنصر من $n\mathbb{Z}$
- و أخيرا إذا كان $x = nk$ عنصر من $n\mathbb{Z}$ فإن $-x = -nk = (-k)n$ عنصر من $n\mathbb{Z}$

و بالعكس نفرض أن H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

- إذا كان $H = \{0\}$ فإن $H = 0\mathbb{Z}$
- إذا كان H تحوي على أكثر من عنصر فهي إذن تحوي على عنصر موجب غير معدوم (لأنه لكل عنصر من H نظيره في H)

و نضع

$$n = \min \{h > 0 \ / h \in H\}$$

إذن $n>0$. بما أن $n\in H$ فإن $-n\in H$ و أيضا $2n=n+n\in H$

وهكذا نجد أن من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$ فإن $kn\in H$ إذن

$n\mathbb{Z}\subset H$ ، لنبين الإحتواء العكسي

ليكن $h\in H$ ، بكتابة القسمة الإقليدية

~~$h\in H \Rightarrow kn\in H$~~

$$h = kn + r,\ k,r\in\mathbb{Z} \text{ et } 0\leq r<n$$

بما أن $n\in H$, $h\in H$ فإن $kn\in H$ إذن $r=h-kn\in H$ ولكن $r<n$

إذن $r=0$ إذن $h=kn\in n\mathbb{Z}$ ومنه $H\subset n\mathbb{Z}$

إذن $H=n\mathbb{Z}$.

الزمرة الجزئية المولدة :

لتكن $(G,*)$ زمرة و $E\subset G$ (مجموعة جزئية من G)

الزمرة الجزئية المولدة بـ E هي أصغر زمرة جزئية ~~من~~

من G والتي تحوي E .

مثال : (P$_3$ إذا كان $E=\{2\}$ فإن الزمرة الجزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$

المولدة بـ E هي $H=\{2^n / n\in\mathbb{Z}\}$ لإثبات ذلك

يكفي إثبات أن

1) H ز ج من $(\mathbb{R}^*,\times)$

2) إذا كان H' ز ج من $(\mathbb{R}^*,\times)$ حيث $2\in H'$

فإن $H\subset H'$

ب) في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ إذا كان $E=\{2\}$ إذن الزمرة الجزئية

المولدة لـ E هي $H=2\mathbb{Z}$

د) في $(\mathbb{Z},+)$ إذا كان $E=\{8,12\}$ فإن $H=4\mathbb{Z}$

حيث $n=\text{Pgcd}(a,b)$ فإن $E=\{a,b\}$ $H=n\mathbb{Z}$

تمارين :

1) بين أن $\{2^n / n\in\mathbb{Z}\}$ عبارة عن زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$

2) بين أن : إذا كانت H و H' زمرتان جزئيتان من $(G,*)$ فإن $H\cap H'$ هي أيضا زمرة جزئية من $(G,*)$

3) بين أن $5\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$

4) أوجد الزمرة الجزئية المولدة لـ $\{-12,8,20\}$

تشاكل الزمر :

تعريف : لتكن $(G,*)$ و (G',T) زمرتان . نقول عن التطبيق $f : G \to G'$ أنه تشاكل زمري ، إذا كان :

$$\forall\ x, x' \in G : f(x * x') = f(x)\, T\, f(x')$$

مثال :

$$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$$
$$x \longmapsto e^x$$

لدينا

$$\forall\ x, x' \in \mathbb{R} : f(x + x') = \exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x')$$
$$= f(x) \cdot f(x')$$

ومنه f تشاكل زمري

خواص : لتكن $(G,*)$ و (G',T) زمرتان و e_G و $e_{G'}$ العنصر الحيادي لـ G و G'

قضية : لتكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري ، إذن

1) $f(e_G) = e_{G'}$

2) من أجل كل $x \in G$ فإن $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

البرهان : 1) لدينا :

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G)\, T\, f(e_G)$$
$$\Rightarrow [f(e_G)]^{-1}\, T\, f(e_G) = [f(e_G)]^{-1}\, T\, \big(f(e_G)\, T\, f(e_G)\big)$$
$$\Rightarrow e_{G'} = e_{G'}\, T\, f(e_G) = f(e_G)$$

2) ليكن $x \in G$ إذن

$$x * x^{-1} = e_G$$
$$\Rightarrow f(x * x^{-1}) = f(e_G) \Rightarrow f(x) * f(x^{-1}) = e_{G'}$$
$$\Rightarrow [f(x)]^{-1} * \big(f(x) * f(x^{-1})\big) = [f(x)]^{-1} * e_{G'}$$ (نركب $[f(x)]^{-1}$ من الطرفين)
$$\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

نواة و صورة تطبيق (Noyau et image d'une application)

ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري نعرف المجموعتان التاليتان :

1 نواة f هي المجموعة :

$$\ker(f) = \{x \in G \ / \ f(x) = e_{G'}\}$$

$\ker(f)$ مجموعة جزئية من G ولدينا $\ker(f) = f^{-1}(\{e_{G'}\})$

2 صورة f هي المجموعة :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \ / \ x \in G\}$$

$\mathrm{Im}(f)$ مجموعة جزئية من G' ولدينا $\mathrm{Im}(f) = f(G)$

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري إذن لدينا

1) $\ker(f)$ زمرة جزئية من G

2) $\mathrm{Im}(f)$ زمرة جزئية من G'

3) f متباين إذا وفقط إذا كان $\ker(f) = \{e_G\}$

4) f غامر إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Im}(f) = G'$

البرهان : 1 لنبرهن أن $\ker(f)$ زمرة جزئية من G

أ) لدينا $f(e_G) = e_{G'}$ إذن $e_G \in \ker(f)$ ومنه $\ker(f) \neq \phi$

ب) ليكن $x, x' \in \ker(f)$ إذن :

$$f(x * x') = f(x) \top f(x') = e_{G'} \top e_{G'} = e_{G'} \Rightarrow x * x' \in \ker(f)$$

ج) ليكن $x \in \ker(f)$، إذن

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} = (e_{G'})^{-1} = e_{G'} \Rightarrow x^{-1} \in \ker(f)$$

2 إثبات أن $\mathrm{Im}(f)$ زمرة جزئية من G'

أ) لدينا $f(e_G) = e_{G'}$، إذن $e_{G'} \in \mathrm{Im}(f)$ ومنه $\mathrm{Im}(f) \neq \phi$

ب) ليكن $y, y' \in \mathrm{Im}(f)$، إذن يوجد $x, x' \in G$ حيث

$$f(x) = y \ \wedge \ f(x') = y'$$

ومنه

$$y \top y' = f(x) \top f(x') = f(x * x') \in \mathrm{Im}(f)$$

ج) ليكن $y \in \mathrm{Im}(f)$، إذن يوجد $x \in G$ حيث $y = f(x)$

ومنه

$$y^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) \in \mathrm{Im}(f)$$

3) (أ) f متباين $\overset{?}{\Leftrightarrow} \ker(f)=\{e_G\}$

ليكن $x \in \ker(f)$ إذن $f(x)=e_{G'}$ أي $f(x)=f(e_G)$

ومنه $x=e_G$ (لأن f متباين) ومنه $\ker(f)\subset\{e_G\}$

وبالتالي $\ker(f)=\{e_G\}$

(ب) $\ker(f)=\{e_G\} \overset{?}{\Rightarrow} f$ متباين

ليكن $x, x' \in G$ حيث $f(x)=f(x')$ لدينا

$$e_{G'} = f(x) \top (f(x'))^{-1} = f(x) \top f(x'^{-1}) = f(x * x'^{-1})$$

$$\Rightarrow x * x'^{-1} \in \{e_G\} \Rightarrow x * x'^{-1} = e_G \Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

4) f غامر $\overset{?}{\Leftrightarrow} \mathrm{Im}(f)=G'$

نفرض أن f غامر ونبين أن $\mathrm{Im}(f)=G'$ ، لدينا $\mathrm{Im}(f)\subset G'$
بقي إثبات أن $G'\subset \mathrm{Im} f$

$$y \in G' \Rightarrow \exists x \in G : f(x)=y \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(f)$$

ومنه $\mathrm{Im}(f)=G'$

f غامر $\overset{?}{\Leftarrow} \mathrm{Im}(f)=G'$

$$y \in G' \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in G : f(x)=y$$

ومنه f غامر

II الحلقات :

لتكن A مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين (+) و (·)

تعريف : نقول أن $(A,+,\cdot)$ عبارة عن حلقة إذا كان :

1 - $(A,+)$ زمرة تبديلية

2 - العملية (·) توزيعية على (+) :

$$\forall x,y,z \in A : \quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

3 - العملية (·) تجميعية :

$$\forall x,y,z \in A : x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت A تقبل عنصر حيادي بالنسبة للعملية (·) فإننا نقول أن $(A,+,\cdot)$ حلقة واحدية

ملاحظة : نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للعملية (+) ب : 0

نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للعملية (·) ب : 1

نرمز للعنصر النظير لـ x بالنسبة للعملية (+) ب $-x$

نرمز للعنصر النظير لـ x بالنسبة للعملية (·) ب x^{-1}

قضية : لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة من أجل كل $x,y \in A$ لدينا

1] $0\cdot x = 0$ ، 2] $(-1)\cdot x = -x$ ، 3] $(-1)\cdot(-1) = 1$ ، 4] $(-x)\cdot y = -xy$

البرهان : 1) لدينا

$$0\cdot x + x = 0\cdot x + 1\cdot x = (0+1)\cdot x = 1\cdot x = x$$

نضيف $(-x)$ إلى الطرفين

$$\Rightarrow 0\cdot x = 0$$

نستنتج أنه في الحلقة العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الثانية هو عنصر ماص بالنسبة للعملية الأولى.

2] لدينا :

$$0 = 0\cdot x = (1-1)\cdot x = 1\cdot x - 1\cdot x = x - 1\cdot x$$

بإضافة $(-x)$ إلى الطرفين نجد

$$-x = -1\cdot x$$

3) لدينا :

$$(-1)+1=0$$

بالضرب في (-1) نتحصل على

$$(-1)((-1)+1)=0$$

بإضافة (1) إلى الطرفين : $\Rightarrow (-1)(-1)+(-1)=0 \Rightarrow (-1)(-1)=1$

4) لدينا :

$$x\cdot y+(-x)\cdot y=(x+(-x))\cdot y=(x-x)\cdot y=0\cdot y=0$$

إذن

$$(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$$

أمثلة : لدينا $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ، $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ، $(\mathbb{C},+,\cdot)$ عبارة عن حلقات .

تعريف 1) نقول أن A حلقة تامة ، إذا كان $1\neq 0$ و
$\forall x,y\in A : x\cdot y=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

2) ليكن $x,y\in A$ غير معدومين (لا يساويان العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الأولى (+)) حيث $x\cdot y=0$. نقول أن x و y قواسم للصفر .

3) نقول أن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية إذا كانت العملية $(\cdot)$ تبديلية

4) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة و $H\subset A$ ، نقول أن $(H,+,\cdot)$ حلقة جزئية من A إذا كانت $(H,+,\cdot)$ حلقة

5) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة و $I\subset A$ ، نقول أن I مثالي لـ A من اليسار (على الترتيب من اليمين) إذا وفقط إذا كان
1) $(I,+)$ زمرة تبديلية
2) $\forall a\in A, \forall x\in I, a\cdot x\in I$ (على الترتيب
$(\forall a\in A, \forall x\in I ; x\cdot a\in I$

6) لتكن $(A,+,\cdot)$ و $(B,+,\cdot)$ حلقتان نسمي تشاكل حلقي من A نحو B كل تطبيق من A نحو B يحقق

① $f(1_A) = 1_B$

② $\forall x,y \in A : \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \end{cases}$

3 الحقول :

تعريف : لتكن K مجموعة مزودة بالعمليتين الداخليتين $(+)$ و $(\cdot)$ ، نقول أن $(K,+,\cdot)$ حقل إذا كان

1) $(K,+,\cdot)$ حلقة تبديلية واحدية

2) $(K-\{0\},\cdot)$ زمرة تبديلية .

مثال : $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ، $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ، $(\mathbb{C},+,\cdot)$ عبارة عن حقول

قضية : ليكن $(K,+,\cdot)$ حقل لدينا

1) $1 \neq 0$

2) K لا يقبل قواسم للصفر إذن K حلقة تامة