جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر1
2022/2023

السلسلة رقم 03 (العلاقات الثنائية)

التمرين 01:

نعرف على $\mathbb{N}^*$ العلاقة الثنائية S بـ

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2: \quad mSn \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*: n = km$$

1) بين أن S علاقة ترتيب على $\mathbb{N}^*$.
2) هل هذا الترتيب كلي؟
3) هل $\mathbb{N}^*$ لديها أكبر عنصر وأصغر عنصر؟
4) هل $A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ لديها أكبر عنصر وأصغر عنصر وحاد أعلى وحاد أدنى؟

التمرين 02:

نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية S بـ

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2: \quad aSb \Leftrightarrow a \leq b + 1$$

1) تحقق أن $1S0$ و $0S1$. ماذا تستنتج؟
2) نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية L بـ

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2: \quad aLb \Leftrightarrow a < b + 1$$

بين أن L علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$.

التمرين 03:

نعرف على $\mathbb{R}^*$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*: \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x.y > 0$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$.
2) أوجد مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/\mathcal{R}$.

التمرين 04:

نعرف على $\mathbb{R}^2$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2: \quad (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^2$.
2) أوجد صنف تكافؤ $(0,0)$.

السلسلة 03
العلاقات الثنائية

التمرين 01:

نعرف على $\mathbb{N}^*$ العلاقة الثنائية δ بـ:

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^{*2}: m\delta n \iff \exists k\in\mathbb{N}^*: n=k\cdot m$$

1. نبين أن δ علاقة ترتيب على $\mathbb{N}^*$:

تكون العلاقة الثنائية δ علاقة ترتيب على المجموعة E إذا تحقق:

① δ انعكاسية: $\forall x\in E: x\delta x$

② δ ضد تناظرية: $\forall x,y\in E$

$$x\delta y\wedge y\delta x \Rightarrow x=y$$

③ δ متعدية: $\forall x,y,z\in E$

$$x\delta y\wedge y\delta z \Rightarrow x\delta z$$

① δ انعكاسية:

$$\forall m\in\mathbb{N}^*: \exists k=1\in\mathbb{N}^*: m=1\cdot m$$
$$\Rightarrow m\delta m$$

إذن: δ انعكاسية.

② δ ضد تناظرية: ليكن $m,n\in\mathbb{N}^*$ بحيث:

$$\left.\begin{matrix} m\delta n \\ \wedge \\ n\delta m\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\exists k\in\mathbb{N}^*: n=k\cdot m \\ \wedge \\ \exists k'\in\mathbb{N}^*: m=k'\cdot n\end{cases}$$

$$n=k\cdot m$$
$$\Rightarrow n=k\cdot k'\cdot n$$
$$\Rightarrow n-kk'n=0$$
$$\Rightarrow n(1-kk')=0$$
$$n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 1-kk'=0$$
$$\Rightarrow kk'=1$$
$$k,k'\in\mathbb{N}^* \Rightarrow k=k'=1$$
$$\Rightarrow m=n$$

إذن: δ ضد تناظرية

③ δ متعدية: ليكن $m,n,p\in\mathbb{N}^*$ بحيث:

$$\left.\begin{matrix} m\delta n \\ \wedge \\ n\delta p\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\exists k\in\mathbb{N}^*: n=k\cdot m \\ \wedge \\ \exists k'\in\mathbb{N}^*: p=k'\cdot n\end{cases}$$

$$p=k'\cdot n$$
$$\Rightarrow p=\underbrace{k'\cdot k}\cdot m$$
$$\Rightarrow \exists k''\in\mathbb{N}^*: p=k''\cdot m$$
$$\Rightarrow m\delta p$$

إذن: δ متعدية.

ومنه: δ علاقة ترتيب على $\mathbb{N}^*$.

2) هل هذا الترتيب كلي:

δ علاقة ترتيب على المجموعة E، نقول أن هذا الترتيب كلي إذا تحقق:

$$\forall x,y\in E: (x\delta y)\vee(y\delta x)$$

إذا كان هذا الترتيب ليس كلي فهو جزئي.

$$\exists x,y\in E: (x\not\delta y)\wedge(y\not\delta x)$$

3) هل $\mathbb{N}^*$ لديها أكبر عنصر وأصغر عنصر؟

$$\mathrm{Max}\,E=M \iff \begin{cases}M\in E \\ \wedge \\ \forall x\in E: x\delta M\end{cases}$$

$$\min E=l \iff \begin{cases}l\in E \\ \wedge \\ \forall x\in E: l\delta x\end{cases}$$

* أكبر عنصر:

$$\mathrm{Max}\,\mathbb{N}^*=M$$
$$\iff \begin{cases}M\in\mathbb{N}^* \\ \wedge \\ \forall m\in\mathbb{N}^*: m\delta M\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}M\in\mathbb{N}^* \\ \wedge \\ \forall m\in\mathbb{N}^*: \exists k\in\mathbb{N}^*: M=k\cdot m\end{cases}$$

$\iff$ M غير موجود

لأنه لا يوجد عنصر M من $\mathbb{N}^*$ يقبل القسمة على جميع عناصر $\mathbb{N}^*$.

* أصغر عنصر:

$$\min\mathbb{N}^*=l$$
$$\iff \begin{cases}l\in\mathbb{N}^* \\ \wedge \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: l\delta n\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}l\in\mathbb{N}^* \\ \wedge \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: \exists k\in\mathbb{N}^*: n=k\cdot l\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \min \mathbb{N}^* = 1 = l$

4) هل $A=\{4,5,6,7,8,9,10\}$ لديها أكبر عنصر، أصغر عنصر، حاد أعلى وحاد أدنى؟

* أكبر عنصر: $\text{Max } A = M$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\in A \\ \wedge \\ \forall m\in A: m\,\delta\,M\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\in A\\ \wedge\\ \forall m\in A: \exists k\in\mathbb{N}^*: M=k.m\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ M غير موجود
لأنه لا يوجد عنصر M من A ويقبل القسمة على جميع عناصر A.

* أصغر عنصر: $\min A = l$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l\in A\\ \wedge\\ \forall n\in A: l\,\delta\, n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l\in A\\ \wedge\\ \forall n\in A: \exists k\in\mathbb{N}^*: n=k.l\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ l غير موجود
لأنه لا يوجد عنصر من A ويقسم جميع عناصر A.

* حاد أعلى:

$\boxed{\alpha \text{ حاد أعلى لـ } A \Leftrightarrow \forall x\in A: x\,\delta\,\alpha}$

α حاد أعلى لـ A

$\Leftrightarrow \forall m\in A: m\,\delta\,\alpha$

$\Leftrightarrow \forall m\in A: \exists k\in\mathbb{N}^*: \alpha=k.m$

$\Leftrightarrow (\alpha=k_1.4)\wedge(\alpha=k_2.5)\wedge(\alpha=k_3.6)\wedge(\alpha=k_4.7)\wedge(\alpha=k_5.8)\wedge(\alpha=k_6.9)\wedge(\alpha=k_7.10).$

$\Leftrightarrow$ α المضاعف المشترك الأصغر لعناصر المجموعة A

$\Leftrightarrow \alpha = PPCM(4,5,6,7,8,9,10) = 2^3.3^2.5.7 = 2520$

* حاد أدنى:

$\boxed{\beta \text{ حاد أدنى لـ } A \Leftrightarrow \forall x\in A: \beta\,\delta\,x}$

β حاد أدنى لـ A

$\Leftrightarrow \forall n\in A: \beta\,\delta\,n$

$\Leftrightarrow \forall n\in A: \exists k\in\mathbb{N}^*: n=k.\beta$

$\Leftrightarrow (4=k_1.\beta)\wedge(5=k_2.\beta)\wedge(6=k_3.\beta)\wedge(7=k_4.\beta)\wedge(8=k_5.\beta)\wedge(9=k_6.\beta)\wedge(10=k_7.\beta).$

$\Leftrightarrow$ β القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة A

$\Leftrightarrow \beta = PGCD(4,5,6,7,8,9,10)=1$

التمرين 2:

نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية δ بـ:

$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2: a\,\delta\,b \Leftrightarrow a\leq b+1$

1) التحقق أن: $1\delta 0$ و $0\delta 1$:

لدينا: $1\leq 0+1$ اذن: $1\delta 0$.

لدينا: $0\leq 1+1$ اذن: $0\delta 1$.

الاستنتاج:

$(0\delta 1$ و $1\delta 0)$ لكن $1\neq 0$

اذن: δ ليست ضد تناظرية.

2) نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية $\angle$ بـ:

$\forall a,b\in\mathbb{Z}: a\angle b \Leftrightarrow a<b+1$

نبين أن: $\angle$ علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$:

① $\angle$ انعكاسية:

$\forall a\in\mathbb{Z}: a<a+1$
$\Rightarrow a\angle a$

اذن: $\angle$ انعكاسية.

② $\angle$ ضد تناظرية: ليكن $a,b\in\mathbb{Z}$ بحيث:

$$\begin{rcases} a\angle b\\ \wedge\\ b\angle a\end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} a<b+1\\ \wedge\\ b<a+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1<b\\ \wedge\\ b<a+1\end{cases}$$

$\Rightarrow a-1<b<a+1$

بما أن: العدد الصحيح الوحيد المحصور بين العددين الصحيحين $(a-1)$ و$(a+1)$ هو العدد الصحيح a اذن: $a=b$

ومنه: $\angle$ ضد تناظرية.

③ $\angle$ متعدية: ليكن $a,b,c\in\mathbb{Z}$ بحيث:

$$\begin{rcases} a\angle b\\ \wedge\\ b\angle c\end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} a<b+1\\ \wedge\\ b<c+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\leq b\\ \wedge\\ b<c+1\end{cases}$$

$\Rightarrow a < c+1$

$\Rightarrow a \angle c$

اذن : $\angle$ متعدية .

ومنه : $\angle$ علاقة ترتيب على $\mathbb{Z}$.

التمرين 03 :

تعرف على $\mathbb{R}^*$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ :

$\forall x,y\in\mathbb{R}^* : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\cdot y>0$

1) نبين أن : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$:

تكون العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على المجموعة E إذا تحقق :

① $\mathcal{R}$ انعكاسية : $\forall x\in E : x\mathcal{R}x$

② $\mathcal{R}$ تناظرية : $\forall x,y\in E : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

③ $\mathcal{R}$ متعدية : $\forall x,y,z\in E :$ $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

① $\mathcal{R}$ انعكاسية :

$\forall x\in\mathbb{R}^* : x^2>0$

$\Rightarrow x\cdot x>0$

$\Rightarrow x\mathcal{R}x$

اذن : $\mathcal{R}$ انعكاسية .

② $\mathcal{R}$ تناظرية : ليكن $x,y\in\mathbb{R}^*$ بحيث :

$x\mathcal{R}y \Rightarrow x\cdot y>0$

$\Rightarrow y\cdot x>0$ (لأن : الضرب في $\mathbb{R}^*$ تبديلي)

$\Rightarrow y\mathcal{R}x$

اذن : $\mathcal{R}$ تناظرية

③ $\mathcal{R}$ متعدية : ليكن $x,y,z\in\mathbb{R}^*$ بحيث :

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\cdot y>0 \\ \wedge \\ y\cdot z>0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x\cdot y\cdot y\cdot z>0$

(لأن : جداء عددين حقيقيين موجبين تماما هو عدد حقيقي موجب تماما) .

$\Rightarrow x\cdot z\cdot y^2>0$

$\Rightarrow x\cdot z>0$

$\Rightarrow x\mathcal{R}z$

اذن : $\mathcal{R}$ متعدية .

ومنه : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$.

2) ايجاد مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{R}^*/\mathcal{R}$:

$\bar{x}=Cl(x)=\underset{\text{صنف تكافؤ العنصر } x}{\dot{x}}=\{y\in E / y\mathcal{R}x\}$

حيث : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على E .

$E/\mathcal{R}$: مجموعة حاصل القسمة هي أصناف تكافؤ جميع عناصر E بالنسبة لعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$.

نلاحظ أن :

$\dot{2}=\{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}2\}$

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y\cdot 2>0\}$

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y>0\}=\mathbb{R}^*_+$

$\dot{\sqrt{2}}=\{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}\sqrt{2}\}$

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y\cdot\sqrt{2}>0\}$

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y>0\}=\mathbb{R}^*_+$

$\dot{\widehat{(-1)}}=\{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}(-1)\}$.

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y\cdot(-1)>0\}$.

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y<0\}=\mathbb{R}^*_-$

$\dot{\widehat{(-3)}}=\{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}(-3)\}$.

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y\cdot(-3)>0\}$.

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y<0\}=\mathbb{R}^*_-$

اذن :

$\mathbb{R}^*/\mathcal{R}=\{\mathbb{R}^*_+ , \mathbb{R}^*_-\}$.

• أو يمكن مناقشة ذلك من تعريف :

$\dot{x}=\{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}x\}$.

$=\{y\in\mathbb{R}^* / y\cdot x>0\}$.

التمرين 04 :

تعرف على $\mathbb{R}^2$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ :

$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2 :$

$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$

1) نبين أن : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^2$:

① $\mathcal{R}$ انعكاسية :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=x+y$

$$\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x,y)$$

اذن: $\mathcal{R}$ انعكاسية.

② $\mathcal{R}$ تناظرية: ليكن $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ بحيث:

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow x+y=x'+y'$$

$$\Rightarrow x'+y'=x+y$$ (لأنها مساواة)

$$\Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$$

اذن: $\mathcal{R}$ تناظرية.

③ $\mathcal{R}$ متعدية: ليكن $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$ بحيث:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\mathcal{R}(x',y')\\ \wedge\\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'')\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y=x'+y'\\ \wedge\\ x'+y'=x''+y''\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x+y=x''+y''$$

$$\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'')$$

اذن: $\mathcal{R}$ متعدية.

ومنه: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^2$.

2) ايجاد صنف تكافؤ $(0,0)$:

$$\dot{\overline{(x,y)}}=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2/(x',y')\mathcal{R}(x,y)\}$$

اذن:

$$\dot{\overline{(0,0)}}=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2/(x',y')\mathcal{R}(0,0)\}$$

$$=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2/x'+y'=0+0\}$$

$$=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2/x'+y'=0\}$$

$$=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2/y'=-x'\}$$

$$=\{(x',-x')/x'\in\mathbb{R}\}$$