جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر1
2022/2023

السلسلة رقم 02 (المجموعات و التطبيقات)

<u>التمرين 01:</u>

لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E

1) بين أن:

أ) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

ب) $(A \cap B) \cup \complement_E^B = A \cup \complement_E^B$

ج) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

د) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$

2) بسط المجموعات التالية:

أ) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathrm{c}} \cap (\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cup \mathrm{C})^{\mathrm{c}}$

ب) $(A \cap B)^c \cup (A^c \cap C)^c$

3) نعرف الفرق بين مجموعتين A و B بـ $A \setminus B = A \cap B^c$

والفرق التناظري بـ $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

بين أن: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

<u>التمرين 2:</u>

ليكن التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = x^2 + 1$

ولتكن المجموعتان $A = [-3,2]$ و $B = [0,4]$

1) عين $f(A), f(B), f(A \cap B)$

2) قارن بين $f(A \cap B)$ و $f(A) \cap f(B)$

التمرين 03:

ليكن $f\ :\ E\ \to\ F$ تطبيق. A,B جزئين من E و X,Y جزئين من F. بين ما يلي:

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2) $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$
3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
5) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
6) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
7) $A \subset f^{-1}(f(A))$ و $f(f^{-1}(X)) \subset X$
8) بين أنه: إذا كان f متباين فإن $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ و $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$
9) بين أنه: إذا كان f غامر فإن $f\big(f^{-1}(X)\big) = X$

التمرين04:

ليكن التطبيقان $f\ :\ [0,1] \to [0,2]$ حيث $f(x) = 2 - x$ و $g\ :\ [-1,1] \to [0,2]$ حيث $g(x) = x^2 + 1$

1) هل f تقابل ؟ علل
2) هل g تقابل ؟ علل
3) عين المجموعات $f(\{1/2\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ g\big([-1,1]\big),\ g^{-1}([0,2])$.
4) عين $f \circ g$ و $g \circ f$.

التمرين05:

ليكن التطبيقان $g\ :\ F \to G$. $f\ :\ E \to F$ بين أن:

1) f و g متباينين $\Leftarrow$ $(g \circ f)$متباين
2) f و g غامرين $\Leftarrow$ $(g \circ f)$ غامر
3) f و g تقابلين $\Leftarrow$ $(g \circ f)$ تقابل
4) $(g \circ f)$ متباين $\Leftarrow$ f متباين
5) $(g \circ f)$ غامر $\Leftarrow$ g غامر

ملاحظة: أستاذ الأعمال الموجهة مكلف بتوجيه الطلبة لا بحل التمارين.

السلسلة 02
المجموعات والتطبيقات

التمرين 01:

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E.

1) نبين أن:

أ. $A\subset B \overset{??}{\Rightarrow} B^c\subset A^c$

$$\boxed{\begin{array}{l} A\subset B \Leftrightarrow (\forall x: x\in A \Rightarrow x\in B) \\ A^c_E = C^A_E = \bar{A} = \{x\in E / x\notin A\} \end{array}}$$

نفرض أن: $A\subset B$ ونثبت أن: $B^c \overset{?}{\subset} A^c$

ليكن $x\in B^c \Rightarrow x\in E \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in E\wedge x\notin A$ (لأن: $A\subset B$)

$\Rightarrow x\in A^c$

إذن: $B^c\subset A^c$

ومنه: $A\subset B\Rightarrow B^c\subset A^c$

ب) $(A\cap B)\cup C^B_E \overset{??}{=} A\cup C^B_E$

$$\boxed{(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)}$$

$$(A\cap B)\cup C^B_E = (A\cup C^B_E)\cap(\underbrace{B\cup C^B_E}_{E})$$
$$= (A\cup C^B_E)\cap E$$
$$= A\cup C^B_E.$$

2) $(A\setminus B)\setminus C \overset{??}{=} A\setminus(B\cup C)$

$A=B \Leftrightarrow (A\subset B)\wedge(B\subset A)$

$$\boxed{\begin{array}{l} x\in(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B. \\ x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B \\ x\in(A\cup B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \\ x\notin(A\cup B) \Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B \end{array}}$$

A,B مجموعات جزئية من E
$$\boxed{\begin{array}{l} A\setminus B = \{x: x\in A\wedge x\notin B\} \\ x\in(A\setminus B) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B \end{array}}$$

$((A\setminus B)\setminus C) \overset{??}{\subset} (A\setminus(B\cup C))$

ليكن $x\in((A\setminus B)\setminus C) \Rightarrow x\in(A\setminus B)\wedge x\notin C$

$\Rightarrow x\in A\wedge \underbrace{x\notin B\wedge x\notin C}$.

$\Rightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in(A\setminus(B\cup C))$

إذن: $((A\setminus B)\setminus C)\subset(A\setminus(B\cup C))$

$(A\setminus(B\cup C)) \overset{??}{\subset} ((A\setminus B)\setminus C)$

ليكن $x\in(A\setminus(B\cup C)) \Rightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

$\Rightarrow \underbrace{x\in A\wedge x\notin B}\wedge x\notin C$

$\Rightarrow x\in(A\setminus B)\wedge x\notin C$

$\Rightarrow x\in((A\setminus B)\setminus C)$.

إذن: $(A\setminus(B\cup C))\subset((A\setminus B)\setminus C)$

ومنه: $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$

إثبات العلاقة التالية بطريقة ثانية:

$(A\setminus B)\setminus C \overset{??}{=} A\setminus(B\cup C)$

$(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus B)\cap C^c$ (لأن: $A\setminus B = A\cap B^c$)

$= A\cap B^c\cap C^c$

$= A\cap(B^c\cap C^c)$ (لأن: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$)

$= A\cap(B\cup C)^c$

$= A\setminus(B\cup C)$.

د. $(A\times C)\cup(B\times C) \overset{??}{=} (A\cup B)\times C$

الجداء الديكارتي بين E و F
$$\boxed{E\times F = \{(x,y) / x\in E\wedge y\in F\}}$$

ليكن $(x,y)\in[(A\times C)\cup(B\times C)]$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x,y)\in(A\times C)}\vee\underbrace{(x,y)\in(B\times C)}$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge y\in C$.

$\Leftrightarrow (x\in(A\cup B))\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow (x,y)\in((A\cup B)\times C)$

ومنه: $(A\times C)\cup(B\times C) = (A\cup B)\times C$

2) نبسط المجموعات التالية:

أ. $(A\cup B)^c\cap(A^c\cup C)^c$

$\boxed{(A^c)^c = A}$

$= (A^c\cap B^c)\cap((A^c)^c\cap C^c)$

$= A^c\cap B^c\cap A\cap C^c$

$= \underbrace{A^c\cap A}\cap B^c\cap C^c$

$= \emptyset\cap B^c\cap C^c = \emptyset$

ب) $(A\cap B)^c\cup(A^c\cap C)^c$

$=(A^c\cup B^c)\cup((A^c)^c\cup C^c)$

$=A^c\cup B^c\cup A\cup C^c$

$=\underbrace{A^c\cup A}\cup B^c\cup C^c$

$=E\cup B^c\cup C^c$

$=E.$

3) نعرف الفرق بين مجموعتين A و B بـ :

$A\setminus B=A\cap B^c$

والفرق التناظري بـ : $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

نبين أن: $A\Delta B\overset{??}{=}(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

$=\underbrace{[A\cup(B\cap A^c)]}\cap\underbrace{[B^c\cup(B\cap A^c)]}$

$=(A\cup B)\cap(\underline{A\cup A^c})\cap(\underline{B^c\cup B})\cap(B^c\cup A^c)$

$\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

$=(A\cup B)\cap E\cap E\cap(B^c\cup A^c)$

$=(A\cup B)\cap(B^c\cup A^c)$

$=(A\cup B)\cap(B\cap A)^c$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

$=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$

التمرين 02:

تعريف: ليكن التطبيق $f:E\to F$
و $A\subset E$ و $B\subset F$ نعرف:
- الصورة المباشرة لـ A بواسطة f المجموعة:
$f(A)=\{f(x)/x\in A\}\subset F$

ليكن التطبيق $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=x^2+1.$

ولتكن المجموعتان $A=[-3,2]$ و $B=[0,4]$

1) تعيين:

* $f(A)=\{f(x)/x\in A\}.$

لدينا: $A=[-3,2]=[-3,0]\cup[0,2]$

اذن: $f(A)=f([-3,2])=f([-3,0]\cup[0,2])$

ولدينا: $f(x)=x^2+1\Rightarrow f'(x)=2x.$

اذن: $f(x)\nearrow$ على $[0,2]$ و $f(x)\searrow$ على $[-3,0]$

• $f([-3,0])=\{f(x)/-3\le x\le 0\}.$

$f(x)\searrow$ على $[-3,0]$ اذن:

$-3\le x\le 0\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(-3)$

$\Rightarrow 1\le f(x)\le 10$

اذن: $f([-3,0])=[1,10].$

• $f([0,2])=\{f(x)/0\le x\le 2\}.$

$f(x)\nearrow$ على $[0,2]$ اذن:

$0\le x\le 2\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(2)$

$\Rightarrow 1\le f(x)\le 5$

اذن: $f([0,2])=[1,5].$

ومنه: $f(A)=[1,10]\cup[1,5]=[1,10].$

* $f(B)=\{f(x)/x\in B\}.$

$=\{f(x)/0\le x\le 4\}$

$f(x)\nearrow$ على $[0,4]$ اذن:

$0\le x\le 4\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(4)$

$\Rightarrow 1\le f(x)\le 17$

$\Rightarrow f(B)=f([0,4])=[1,17].$

* $f(A\cap B)=f([-3,2]\cap[0,4])=f([0,2])$

$=\{f(x)/0\le x\le 2\}.$

$f(x)\nearrow$ على $[0,2]$ اذن:

$0\le x\le 2\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(2)$

$\Rightarrow 1\le f(x)\le 5$

$\Rightarrow f(A\cap B)=[1,5].$

2) نقارن بين $f(A\cap B)$ و $f(A)\cap f(B)$:

لدينا: $f(A)\cap f(B)=[1,10]\cap[1,17]=[1,10]$

ووجدنا: $f(A\cap B)=[1,5]$

ومنه: $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B).$

التمرين 03:

تعريف: ليكن التطبيق $f:E\to F$
و $A\subset E$ و $B\subset F$ نعرف:
- الصورة المباشرة لـ A بواسطة f المجموعة:
$f(A)=\{f(x)/x\in A\}\subset F$
- الصورة العكسية لـ B بواسطة f المجموعة:
$f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}\subset E$

ليكن $f:E \longrightarrow F$ تطبيق،

A,B جزئيتان من E و X,Y جزئيتين من F

أي: $A\subset E$، $B\subset E$، $X\subset F$، $Y\subset F$

نبين ما يلي:

1) $A\subset B \overset{??}{\Rightarrow} f(A)\subset f(B)$

نفرض أن: $A\subset B$ ونثبت أن: $f(A)\overset{??}{\subset} f(B)$

ليكن

$$y\in f(A) \Rightarrow y\in F/\exists x\in A: y=f(x)$$
$$\Rightarrow y\in F/\exists x\in B: y=f(x) \quad (\text{لأن: } A\subset B)$$
$$\Rightarrow y\in f(B)$$

اذن: $f(A)\subset f(B)$

ومنه: $A\subset B \Rightarrow f(A)\subset f(B)$

2) $X\subset Y \overset{??}{\Rightarrow} f^{-1}(X)\subset f^{-1}(Y)$

نفرض أن: $X\subset Y$ ونثبت أن: $f^{-1}(X)\overset{??}{\subset} f^{-1}(Y)$

ليكن

$$x\in f^{-1}(X) \Rightarrow x\in E/f(x)\in X$$
$$\Rightarrow x\in E/f(x)\in Y \quad (\text{لأن: } X\subset Y)$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(Y)$$

اذن: $f^{-1}(X)\subset f^{-1}(Y)$

ومنه: $X\subset Y \Rightarrow f^{-1}(X)\subset f^{-1}(Y)$

3) $f(A\cap B)\overset{??}{\subset}\big(f(A)\cap f(B)\big)$

ليكن

$$y\in f(A\cap B)$$
$$\Rightarrow y\in F/\exists x\in (A\cap B): y=f(x).$$
$$\Rightarrow y\in F/\exists x\in A \wedge \exists x\in B \wedge y=f(x).$$
$$\Rightarrow \big(y\in F/\exists x\in A \wedge y=f(x)\big)\wedge\big(y\in F/\exists x\in B\wedge y=f(x)\big)$$
$$\Rightarrow y\in f(A) \wedge y\in f(B)$$
$$\Rightarrow y\in \big(f(A)\cap f(B)\big)$$

اذن: $f(A\cap B)\subset\big(f(A)\cap f(B)\big)$

ملاحظة: يمكن اثبات هذا الاحتواء بطريقة أخرى:

$$\left.\begin{array}{l}(A\cap B)\subset A\\ (A\cap B)\subset B\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{حسب } (1)}\left\{\begin{array}{l}f(A\cap B)\subset f(A)\\ \wedge\\ f(A\cap B)\subset f(B)\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \big(f(A\cap B)\cap f(A\cap B)\big)\subset\big(f(A)\cap f(B)\big)$$
$$\Rightarrow f(A\cap B)\subset\big(f(A)\cap f(B)\big)$$

4) $f^{-1}(X\cap Y)\overset{??}{=}f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$

ليكن

$$x\in f^{-1}(X\cap Y) \Leftrightarrow x\in E\wedge f(x)\in (X\cap Y)$$
$$\Leftrightarrow x\in E\wedge\big(f(x)\in X\wedge f(x)\in Y\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(x\in E\wedge f(x)\in X\big)\wedge\big(x\in E\wedge f(x)\in Y\big)$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(X)\wedge x\in f^{-1}(Y)$$
$$\Leftrightarrow x\in\big(f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)\big)$$

ومنه: $f^{-1}(X\cap Y)=f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$

5) $f(A\cup B)\overset{??}{=}f(A)\cup f(B)$

ليكن $y\in f(A\cup B)$

$$\Leftrightarrow y\in F/\exists x\in (A\cup B)\wedge y=f(x).$$
$$\Leftrightarrow y\in F/(\exists x\in A\vee\exists x\in B)\wedge y=f(x).$$
$$\Leftrightarrow \big(y\in F/\exists x\in A\wedge y=f(x)\big)\vee\big(y\in F/\exists x\in B\wedge y=f(x)\big)$$
$$\Leftrightarrow y\in f(A) \vee y\in f(B)$$
$$\Leftrightarrow y\in \big(f(A)\cup f(B)\big)$$

ومنه: $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

6) $f^{-1}(X\cup Y)\overset{??}{=}f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y)$

ليكن

$$x\in f^{-1}(X\cup Y)\Leftrightarrow x\in E\wedge f(x)\in (X\cup Y)$$
$$\Leftrightarrow x\in E\wedge\big(f(x)\in X\vee f(x)\in Y\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(x\in E\wedge f(x)\in X\big)\vee\big(x\in E\wedge f(x)\in Y\big)$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(X)\vee x\in f^{-1}(Y)$$
$$\Leftrightarrow x\in\big(f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y)\big)$$

ومنه: $f^{-1}(X\cup Y)=f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y)$

7)

* $A\overset{??}{\subset} f^{-1}\big(f(A)\big)$

ليكن

$$x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\big(f(A)\big)$$

اذن: $A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

* $f\big(f^{-1}(X)\big)\overset{??}{\subset} X$

ليكن

$$y\in f\big(f^{-1}(X)\big)\Rightarrow y\in F/\exists x\in f^{-1}(X): y=f(x)$$
$$\Rightarrow y\in F/f(x)\in X : y=f(x)$$
$$\Rightarrow y\in X$$

اذن: $f\big(f^{-1}(X)\big)\subset X$

8) نبين أن :

● إذا كان : f متباينا فإن : $f^{-1}(f(A)) \overset{??}{=} A$??

تعريف : $f : E \to F$ تطبيق .
نقول أن f متباين إذا :
$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

من السؤال (7) أثبتنا أن : $A \subset f^{-1}(f(A))$
محققة دوما .

نثبت الآن أن : $f^{-1}(f(A)) \overset{??}{\subset} A$

ليكن

$x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow \exists x' \in A : f(x) = f(x')$

$\overset{f \text{ متباين}}{\Rightarrow} \exists x' \in A : x = x'$

$\Rightarrow x \in A .$

إذن : $f^{-1}(f(A)) \subset A$

ومنه : f متباين $\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.

● إذا كان : f متباينا فإن : ?? $f(A) \cap f(B) \overset{??}{=} f(A \cap B)$

من السؤال (3) أثبتنا أن : $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$
محققة دوما .

نثبت أن : $(f(A) \cap f(B)) \overset{??}{\subset} f(A \cap B)$

ليكن

$y \in (f(A) \cap f(B))$

$\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$

$\Rightarrow (y \in F / \exists x_1 \in A \wedge y = f(x_1)) \wedge (y \in F / \exists x_2 \in B \wedge y = f(x_2))$

$\Rightarrow y \in F / \exists x_1 \in A \wedge \exists x_2 \in B \wedge y = f(x_1) = f(x_2) .$

$\overset{f \text{ متباين}}{\Rightarrow} y \in F / \exists x_1 \in A \wedge \exists x_2 \in B \wedge y = f(x) \wedge x_1 = x_2 = x .$

$\Rightarrow y \in F / \exists x \in A \wedge \exists x \in B \wedge y = f(x) .$

$\Rightarrow y \in F / \exists x \in (A \cap B) \wedge y = f(x) .$

$\Rightarrow y \in f(A \cap B)$

إذن : $(f(A) \cap f(B)) \subset f(A \cap B)$

ومنه : f متباين $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

9) نبين أنه : إذا كان f غامر فإن ?? : $f(f^{-1}(X)) \overset{??}{=} X$

من السؤال (7) أثبتنا أن : $f(f^{-1}(X)) \subset X$
محققة دوما

نثبت الآن أن : $X \overset{??}{\subset} f(f^{-1}(X))$

تعريف : $f : E \to F$ تطبيق
نقول أن : f غامر إذا :
$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$

ليكن

$y \in X \subset F \overset{f \text{ غامر}}{\Longrightarrow} \exists x \in E : y = f(x)$

إذن :

$y = f(x) \in X \Rightarrow x \in f^{-1}(X)$

$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(X))$

$\Rightarrow y \in f(f^{-1}(X))$.

ومنه : $X \subset f(f^{-1}(X))$

وبالتالي : f غامر $\Rightarrow f(f^{-1}(X)) = X$.

التمرين 04 :
ليكن التطبيقان

$f : [0,1] \to [0,2]$
$x \mapsto f(x) = 2 - x$

$g : [-1,1] \to [0,2]$
$x \mapsto g(x) = x^2 + 1 .$

1) هل f تقابل ؟ مع التعليل

$f : E \to F$ تطبيق
$x \mapsto y = f(x)$

f متباين $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
f غامر $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$
f تقابل $\Leftrightarrow$ f متباين و غامر .
$\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x))$

لدينا : الصورة $y = 0 \in [0,2]$ ، ليس لها سابقة
في المجال $[0,1]$
أي :
$2 - x = 0$
$\Rightarrow x = 2 \notin [0,1]$

إذن : f ليس غامر
ومنه : f ليس تقابل

2) هل g تقابل ؟ مع التعليل .

$\exists x_1 = -1 \in [0,1] , \exists x_2 = 1 \in [0,1]$

$g(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 .$

$g(1) = 1^2 + 1 = 2$

$g(-1) = g(1) = 2$

لكن : $-1 \neq 1$

إذن : g ليس متباين
ومنه : g ليس تقابل .

3) تعيين المجموعات:

* $f(\{\frac{1}{2}\}) = \{f(x) / x \in \{\frac{1}{2}\}\}$
$= \{f(\frac{1}{2})\} = \{\frac{3}{2}\}$.

* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0,1] / f(x) \in \{0\}\}$.
$= \{x \in [0,1] / f(x) = 0\}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0$
$\Rightarrow x = 2 \notin [0,1]$

إذن: $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

* $g([-1,1]) = \{g(x) / x \in [-1,1]\}$
$= \{g(x) / -1 \leq x \leq 1\}$

$[-1,1] = [-1,0] \cup]0,1]$

$\Rightarrow g([-1,1]) = g([-1,0] \cup]0,1])$
$= g([-1,0]) \cup g(]0,1])$.

- $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$
$\Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2$
$\Rightarrow g(x) \in [1,2]$

إذن: $g([-1,0]) = [1,2]$

- $0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 1$
$\Rightarrow 1 < x^2+1 \leq 2$
$\Rightarrow g(x) \in]1,2]$

إذن: $g(]0,1]) =]1,2]$

ومنه: $g([-1,1]) = g([-1,0]) \cup g(]0,1])$
$= [1,2] \cup]1,2]$
$= [1,2]$

* $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1] / g(x) \in [0,2]\}$

$g(x) \in [0,2] \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 2$
$\Rightarrow 0 \leq x^2+1 \leq 2$
$\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1$
$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$
$\Rightarrow |x| \leq 1$
$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

إذن: $g^{-1}([0,2]) = [-1,1]$

4) تعيين:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto y = f(x) \longmapsto z = g(y) = g(f(x))$$

$$x \longmapsto z = (g\circ f)(x)$$

* لا يمكن تعيين $(f\circ g)$
لأن مجموعة الوصول لـ g $([0,2])$ لا تساوي مجموعة البدء لـ f $([0,1])$.

* لا يمكن تعيين $(g\circ f)$
لأن مجموعة الوصول لـ f $([0,2])$ لا تساوي مجموعة البدء لـ g $([-1,1])$.

ملاحظة:
في حالة ما يكون كل من f و g معرفين من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ أي:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = 2 - x$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = x^2 + 1$

يمكن تعيين كل من:

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2 - g(x)$
$= 2 - (x^2+1) = 1 - x^2$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1$
$= (2-x)^2 + 1 = 4 - 4x + x^2 + 1$
$= x^2 - 4x + 5$.

التمرين 05: ليكن $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقات.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto y = f(x) \longmapsto z = g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$$

نبين ما يلي:

1) f و g متباينين $\overset{??}{\Longrightarrow}$ $(g\circ f)$ متباين

لدينا: f متباين $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

و g متباين $\Leftrightarrow (\forall y_1, y_2 \in F : g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$

ونثبت أن: $(g\circ f)$ متباين ؟؟

أي نثبت أن: $(\forall x_1, x_2 \in E : (g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \overset{??}{\Rightarrow} x_1 = x_2)$.

نفرض أن: $x_1, x_2 \in E$ بحيث:

$(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$
$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\xRightarrow{g \text{ متباين}} f(x_1) = f(x_2)$
$\xRightarrow{f \text{ متباين}} x_1 = x_2$

ومنه: $(g\circ f)$ متباين.

وبالتالي: f متباين و g متباين $\Rightarrow (g\circ f)$ متباين.

2) f و g غامرين $\overset{??}{\Rightarrow}$ $(g\circ f)$ غامر

لدينا: f غامر $\Leftrightarrow$ $\forall y\in F, \exists x\in E: y=f(x)$

و g غامر $\Leftrightarrow$ $\forall z\in G, \exists y\in F: z=g(y)$

ونثبت أن: $(g\circ f)$ غامر ؟؟

أي نثبت أن: $\forall z\in G, \exists x\in E ?? z=(g\circ f)(x)$

g غامر إذن: $\forall z\in G, \exists y\in F: z=g(y)$

بما أن: $y\in F$ و f غامر إذن: $\exists x\in E: y=f(x)$

إذن: $\forall z\in G, \exists x\in E: z=g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)$

ومنه: $(g\circ f)$ غامر.

وبالتالي: f غامر و g غامر $\Rightarrow (g\circ f)$ غامر.

3) f و g تقابليين $\overset{??}{\Rightarrow}$ $(g\circ f)$ تقابلي.

لدينا: f تقابلي $\Leftrightarrow$ f متباين و f غامر.

و g تقابلي $\Leftrightarrow$ g متباين و g غامر.

f متباين و g متباين $\Rightarrow$ (حسب (1)) $(g\circ f)$ متباين.

f غامر و g غامر $\Rightarrow$ (حسب (2)) $(g\circ f)$ غامر.

ومنه: $(g\circ f)$ تقابلي.

وبالتالي: f تقابلي و g تقابلي $\Rightarrow (g\circ f)$ تقابلي.

4) $(g\circ f)$ متباين $\overset{??}{\Rightarrow}$ f متباين.

نفرض أن: $(g\circ f)$ متباين، ونثبت أن: f متباين؟

ليكن $x_1,x_2\in E$ بحيث: $f(x_1)=f(x_2)$

بما أن: g تطبيقا، يمكننا كتابة:

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$$

$\Rightarrow$ (متباين $(g\circ f)$) $x_1=x_2$

إذن: $\forall x_1,x_2\in E: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

أي: f متباين.

ومنه: $(g\circ f)$ متباين $\Rightarrow$ f متباين.

5) $(g\circ f)$ غامر $\overset{??}{\Rightarrow}$ g غامر

نفرض أن: $(g\circ f)$ غامر ونثبت أن: g غامر؟

ليكن $z\in G$.

بما أن: $(g\circ f)$ غامر فإن:

$\forall z\in G, \exists x\in E: z=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

ولكن $f(x)\in F$

إذن: $\forall z\in G$ فإنه: $\exists y=f(x)\in F$ بحيث: $z=g(y)$

أي: g غامر.

ومنه: $(g\circ f)$ غامر $\Rightarrow$ g غامر.