جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2023/2022
2022/11/29

الاسم واللقب:.....

الفوج:.....
السنة الأولى (MI+رياضيات)
المقياس: جبر 1.

07/07

تصحيح فرض رقم 02

تمرين 01: ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$
ولتكن المجموعتان $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ و $B = \{0,2\}$

1) احسب $f^{-1}(B)$, $f(A)$, $f(\mathbb{R})$.
2) هل f متباين ؟علل.
3) بين أن f غامر. هل f تقابل؟

تمرين 02: نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \ x = 3k + y$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.
2) احسب $\dot{0}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$ ثم استنتج $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}}$.

تمرين 01: ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (4)
$x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 2$
$A = \{-2,-1,0,1,2\}$, $B = \{0,2\}$

1) حساب:

• $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$
$= \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$ 0,5
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ 0,25
$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$ 0,25
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ 0,25
$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$ 0,5
$\Rightarrow f(A) = \{0, 2, 4\}$ 0,25

• $f(\mathbb{R}) = ?$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25

إذن: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

• $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\}$
$B = \{0,2\} = \{0\} \cup \{2\}$
إذن: $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\})$
$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ (1)
نلاحظ من السؤال السابق أن: 1 , -2: جذران لـ $f(x)$ 0,25
ومنه: بعد التحليل يمكن كتابة:
$f(x) = (x+2)(x-1)^2$
$f(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \ \vee \ x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = -2 \ \vee \ x = 1$
إذن: $f^{-1}(\{0\}) = \{-2, 1\}$
$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\}$ (2)
$f(x) = 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 2$
$\Rightarrow x^3 - 3x = 0$
$\Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$ 0,25
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$
ومنه: $f^{-1}(\{2\}) = \{0, -\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$
وبالتالي: $f^{-1}(B) = \{-2, 1, 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

2) f ليست متباين إذن: 0,25
$\exists x_1 = -2 \in \mathbb{R}$, $\exists x_2 = 1 \in \mathbb{R}$
$f(x_1) = f(-2) = 0 = f(1) = f(x_2)$ 0,25
لكن: $-2 \neq 1$

(حسب السؤال 1)
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ 0,25 إذن: f غامر (3 0,25
ومنه: f ليست تقابل 0,25

تمرين 02: نعرف على $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ بـ:
$\forall x, y \in \mathbb{Z}: \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \ x = 3k + y$

1) نبين أن: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$:
• الانعكاسية: (1)
$\forall x \in \mathbb{Z}: \ \exists k = 0 \in \mathbb{Z}: \ x = 3 \cdot 0 + x$ 0,75

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : y = 3k'$.

$\Rightarrow \dot{3} = 3\mathbb{Z}$.

- $\dot{4} = \{y \in \mathbb{Z} / y \mathcal{R} 4\}$.

$y \mathcal{R} 4 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k + 4$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k + 3 + 1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3(k+1) + 1$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : y = 3.k' + 1$

$\Rightarrow \dot{4} = 3\mathbb{Z} + 1$

● استنتاج 2:

$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\}$ 0,25

$\Rightarrow x \mathcal{R} x$

. إذن $\mathcal{R}$ انعكاسية

② لنتأكد أن $\mathcal{R}$ نظرية: ليكن $x, y \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$x \mathcal{R} y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k + y$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = x - 3k$

0,75 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3(-k) + x$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : y = 3k' + x$

$\Rightarrow y \mathcal{R} x$

. إذن $\mathcal{R}$ نظرية

③ لنتأكد أن $\mathcal{R}$ متعدية: ليكن $x, y, z \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$\left.\begin{matrix} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k + y \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : y = 3k' + z \end{cases}$

0,75 $x = 3k + y$

$\Rightarrow x = 3k + 3k' + z$

$\Rightarrow x = 3(k + k') + z$

$\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z} : x = 3k'' + z$

$\Rightarrow x \mathcal{R} z$

. إذن $\mathcal{R}$ متعدية

. $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ ومنه:

② ● حساب:

$\dot{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y \mathcal{R} x\}$.

- $\dot{0} = \{y \in \mathbb{Z} / y \mathcal{R} 0\}$

$y \mathcal{R} 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k + 0$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k$

$\Rightarrow \dot{0} = 3\mathbb{Z}$ 0,5

- $\dot{2} = \{y \in \mathbb{Z} / y \mathcal{R} 2\}$.

$y \mathcal{R} 2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k + 2$

$\Rightarrow \dot{2} = 3\mathbb{Z} + 2$

- $\dot{3} = \{y \in \mathbb{Z} / y \mathcal{R} 3\}$.

$y \mathcal{R} 3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3k + 3$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = 3(k+1)$