السلسلة رقم 04

البــنـى الجبرية

التمرين 01:

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي$\star$ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \star y = x + y + x^2 y^2$$

1- هل $\star$ تبديلية؟ هل $\star$ تجميعية؟

2- بين أن المجموعة $\mathbb{R}$ تقبل عنصر حيادي بالنسبة للقانون $\star$ يطلب حسابه.

3- هل للعنصر (-2) نظير بالنسبة للقانون $\star$؟

4- حل المعادلتين الجبريتين التاليتين: $1 \star x = 0, \qquad 1 \star x = 1$

التمرين 02:

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بعملية التركيب الداخلي $\star$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \star y = x + y + \frac{1}{6}$$

1- بين أن: $(\mathbb{R}, \star)$ زمرة تبديلية.

2- ليكن التطبيقان المعرفان من $(\mathbb{R}, \star)$ نحو $(\mathbb{R}, +)$ بالشكل التالي:

$$g(x) = 3x + \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad f(x) = 3x$$

- هل كل من التطبيقين f و g تشاكلا زمريا؟

التمرين 03:

لتكن $(G, .)$ زمرة ، H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان منها.

1- برهن أن $(H_1 \cap H_2)$ زمرة جزئية من G.

2- برهن أن: $(H_1 \cup H_2)$ زمرة جزئية من $G \Leftrightarrow H_1 \subset H_2$ أو $H_2 \subset H_1$.

3- نعرف المجموعة $(H_1 . H_2)$ كما يلي: $H_1 . H_2 = \{x . y \ / \ x \in H_1, y \in H_2\}$

بين أن: $(H_1 . H_2)$ زمرة جزئية من $G \Leftrightarrow H_1 . H_2 = H_2 . H_1$

التمرين04:

بين أن:

1. H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}\,,+) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: H = n\,\mathbb{Z}$
2. $\{2^n/n \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن الزمرة الجزئية من $(\mathbb{R}^\star\,,\times)$ المولدة لـ$\{2\}$
3. $2\mathbb{Z} = \{2n/n \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن الزمرة الجزئية من $(\mathbb{Z}\,,+)$ المولدة لـ$\{2\}$
4. في $(\mathbb{Z}\,,+)$ إذا كان $E = \{8,12\}$ فإن $\langle \mathrm{E} \rangle = 4$ وإذا كان $E = \{a, b\}$ فإن $\mathbb{Z}\langle \mathrm{E} \rangle = \mathrm{pgcd}(a, b)$

التمرين05:

لتكن Eمجموعة غير خالية.

1) بين أن $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$حلقة تبديلية.
2) ما هي العناصر القابلة للقلب بالنسبة لـ $\cap$ ؟
3) هل الحلقة تامة؟

التمرين 06:

ليكن الحقل $(\mathbb{R}, +, .)$ نعرف المجموعة $E = \{a + b\sqrt{2}\ /a\ ,\ \ b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

1) بين أن $\mathbb{Q} \subset E$.
2) تحقق أن $+$عملية داخلية في E.
3) تحقق أن **.** عملية داخلية في E.
4) بين أن $(\mathrm{E}, +, .)$حقل جزئي من $\mathbb{R}$.

التمرين 07:

لتكن $(G,\star)$ و $(G', \top)$ زمرتان و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري، أثبت أن:

1) $f(e) = e'$ و $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.
2) عرف $\mathrm{Ker}(f)$ ثم بين أنها زمرة جزئية من .....
3) عرف $\mathrm{Im}(f)$ ثم بين أنها زمرة جزئية من .....
4) H زمرة جزئية من $G \Rightarrow f(H)$ زمرة جزئية من G'.
5) f متباين $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.
6) f غامر $\Leftrightarrow f(G) = G'$.