جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

السنة الأولى (MI+رياضيات)

مقياس جبر1

2022/2023

السلسلة رقم 04

البـنى الجبرية

التمرين 01:

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي$\star$ المعرف كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \star y = x + y + x^2y^2$$

1- هل $\star$ تبديلية؟ هل $\star$ تجميعية؟

2- بين أن المجموعة $\mathbb{R}$ تقبل عنصر حيادي بالنسبة للقانون $\star$ يطلب حسابه.

3- هل للعنصر (-2) نظير بالنسبة للقانون $\star$؟

4- حل المعادلتين الجبريتين التاليتين: $1 \star x = 1 \qquad 1 \star x = 0,$

التمرين 02:

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بعملية التركيب الداخلي $\star$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \star y = x + y + \frac{1}{6}$$

1- بين أن: $(\mathbb{R}\ ,\star)$ زمرة تبديلية.

2- ليكن التطبيقان المعرفان من $(\mathbb{R}\ ,\star)$ نحو $(\mathbb{R}\ ,+)$ بالشكل التالي:

$$f(x) = 3x \quad \text{و} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

- هل كل من التطبيقين f و g تشاكلا زمريا؟

التمرين 03:

لتكن $(G\ ,.)$ زمرة . H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان منها.

1- برهن أن $(H_1 \cap H_2)$ زمرة جزئية من G.

2- برهن أن: $(H_1 \cup H_2)$ زمرة جزئية من $G \Leftrightarrow H_1 \subset H_2$ أو $H_2 \subset H_1$.

3- نعرف المجموعة $(H_1.H_2)$ كما يلي: $H_1.H_2 = \{x.y \ / \ x \in H_1, y \in H_2\}$

بين أن: $(H_1.H_2)$ زمرة جزئية من $G \Leftrightarrow H_1.H_2 = H_2.H_1$

التمرين04:

بين أن:

1. H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}\,,+) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: H = n\,\mathbb{Z}$
2. $\{2^n/n \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن الزمرة الجزئية من $(\mathbb{R}^\star,\times)$ المولدة لـ $\{2\}$
3. $2\mathbb{Z} = \{2n/n \in \mathbb{Z}\}$ عبارة عن الزمرة الجزئية من $(\mathbb{Z}\,,+)$ المولدة لـ $\{2\}$
4. في $(\mathbb{Z}\,,+)$ إذا كان $E = \{8,12\}$ فإن $\langle E\rangle = 4$ وإذا كان $E = \{a,b\}$ فإن $\mathbb{Z}\langle E\rangle = \mathrm{pgcd}(a,b)$

التمرين05:

لتكن Eمجموعة غير خالية.

1) بين أن $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$حلقة تبديلية.
2) ما هي العناصر القابلة للقلب بالنسبة لـ $\cap$ ؟
3) هل الحلقة تامة؟

التمرين 06:

ليكن الحقل $(\mathbb{R},+,.)$ نعرف المجموعة $E = \{a + b\sqrt{2}\ /a\ ,\ b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

1) بين أن $\mathbb{Q} \subset E$.
2) تحقق أن $+$عملية داخلية في E.
3) تحقق أن . عملية داخلية في E.
4) بين أن $(\mathrm{E},+,.)$حقل جزئي من $\mathbb{R}$.

التمرين 07:

لتكن $(G,\star)$ و $(G',\top)$ زمرتان و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري. أثبت أن:

1) $f(e) = e'$ و $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.
2) عرف $\mathrm{Ker}(f)$ ثم بين أنها زمرة جزئية من .....
3) عرف $\mathrm{Im}(f)$ ثم بين أنها زمرة جزئية من .....
4) H زمرة جزئية من $G \Leftarrow f(H)$ زمرة جزئية من G'.
5) f متباين $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.
6) f غامر $\Leftrightarrow f(G) = G'$.

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر1
2022/2023

تمارين إضافية عن الزمرة الجزئية

التمرين 01:

نزود المجموعة $\mathbb{R}-\{-2\}$ بعملية التركيب $\star$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}:\quad x\star y=xy+2(x+y)+2$$

1- بين أن: $(\mathbb{R}-\{-2\},\star)$ زمرة تبديلية.

2- لتكن المجموعة $H=\{x\in\mathbb{R}, x>-2\}$

- بين أن H زمرة جزئية من $\mathbb{R}-\{-2\}$.

التمرين 02:

لتكن المجموعة $G=]-\infty,1[$. نعرف على G العملية $\star$ بالشكل:

$$\forall a,b\in G,\quad a\star b=a+b-ab$$

1) بين أن $\forall a,b\in G,\quad (a\star b)-1<0$ ، ماذا تستنتج؟

2) بين أن $(G,\star)$ زمرة تبديلية.

3) هل المجموعة $H=[0,1[$ زمرة جزئية من G؟

السلسلة 04

البنى الجبرية

التمرين 05: نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بعملية التركيب الداخلي $*$ المعرف كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:\ x*y=x+y+\frac{1}{6}$$

1) نبين أن: $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبديلية:

> لتكن $*$ قانون تركيب داخلي على E.
> تكون $(E,*)$ زمرة إذا تحقق:
> ① $*$ تجميعية: $\forall x,y,z\in E:\ (x*y)*z=x*(y*z)$
> ② $*$ تقبل عنصر حيادي:
> $\exists e\in E,\ \forall x\in E:\ x*e=e*x=x$
> ③ لكل عنصر نظير بالنسبة لـ $*$:
> $\forall x\in E,\ \exists x'\in E:\ x*x'=x'*x=e$
>
> إضافة إلى ذلك:
> إذا كانت $*$ تبديلية: $\forall x,y\in E:\ x*y=y*x$
> نقول أن الزمرة $(E,*)$ تبديلية.

* **تجميعية:** ليكن $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$(x*y)*z=\left(x+y+\frac{1}{6}\right)*z=\left(x+y+\frac{1}{6}\right)+z+\frac{1}{6}=x+y+z+\frac{1}{3}\quad\dots(1)$$

$$x*(y*z)=x*\left(y+z+\frac{1}{6}\right)=x+\left(y+z+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=x+y+z+\frac{1}{3}\quad\dots(2)$$

$(1)=(2)$ إذن: $*$ تجميعية.

* **تبديلية:** ليكن $x,y\in\mathbb{R}$

$$x*y=x+y+\frac{1}{6}\quad\dots(1)$$
$$y*x=y+x+\frac{1}{6}\quad\dots(2)$$

بما أن: الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$ إذن: $(1)=(2)$

ومنه: $*$ تبديلية.

العنصر الحيادي:

$$\exists e\in\mathbb{R}^{??},\ \forall x\in\mathbb{R}:\ x*e=e*x=x$$

بما أن: $*$ تبديلية، يكفي أخذ معادلة واحدة:

$$x*e=x$$
$$\Rightarrow \cancel{x}+e+\frac{1}{6}=\cancel{x}$$
$$\Rightarrow e=-\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$$

إذن: العنصر الحيادي هو $e=\frac{-1}{6}$

العنصر النظير:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists x'\in\mathbb{R}:\ x*x'=x'*x=e$$

بما أن: $*$ تبديلية، يكفي أخذ معادلة واحدة:

$$x*x'=e$$
$$\Rightarrow x+x'+\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}$$
$$\Rightarrow x'=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-x$$
$$\Rightarrow x'=-\frac{1}{3}-x\in\mathbb{R}$$

إذن: العنصر النظير هو $x'=\frac{-1}{3}-x$

ومنه: $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبديلية.

2) ليكن التطبيقان:

$$f:(\mathbb{R},*)\longrightarrow(\mathbb{R},+),\quad x\longmapsto f(x)=3x$$

$$g:(\mathbb{R},*)\longrightarrow(\mathbb{R},+),\quad x\longmapsto g(x)=3x+\frac{1}{2}$$

هل كل من f و g تشاكلا زمريا؟

> ليكن $(G,*)$، (G',T) زمرتان. يكون التطبيق $f:(G,*)\longrightarrow(G',T)$ تشاكلا زمريا إذا كان:
> $\forall x_1,x_2\in G:\ f(x_1*x_2)=f(x_1)\,T\,f(x_2)$

* **التطبيق f:**

ليكن $x_1,x_2\in\mathbb{R}$:

$$f(x_1*x_2)=f\left(x_1+x_2+\frac{1}{6}\right)=3\left(x_1+x_2+\frac{1}{6}\right)=3x_1+3x_2+\frac{1}{2}\quad\dots(1)$$

$$f(x_1)+f(x_2)=3x_1+3x_2\quad\dots(2)$$

$(1)\neq(2)$ ومنه: f ليس تشاكلا زمريا.

* **التطبيق g:**

ليكن $x_1,x_2\in\mathbb{R}$:

$$g(x_1*x_2)=g\left(x_1+x_2+\frac{1}{6}\right)=3\left(x_1+x_2+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}=3x_1+3x_2+1\quad\dots(1)$$

$g(x_1)+g(x_2)=(3x_1+\frac{1}{2})+(3x_2+\frac{1}{2})$

$=3x_1+3x_2+1 \quad \ldots (2)$

ومنه: $(1)=(2)$ و g تشاكل زمري .

التمرين 01: نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف كما يلي:

$\forall x,y\in\mathbb{R}: x*y=x+y+x^2y^2$

1) هل $*$ تبديلي؟

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$:

$x*y=x+y+x^2y^2$

$y*x=y+x+y^2x^2$

بما أن: الجمع والضرب تبديليان في $\mathbb{R}$

فإن: $x*y=y*x$

ومنه: $*$ تبديلي.

• هل $*$ تجميعي؟

$\exists x=1\in\mathbb{R}, \exists y=2\in\mathbb{R}, \exists z=-1\in\mathbb{R}:$

• $(1*2)*(-1)=(1+2+1^2 2^2)*(-1)$

$=7*(-1)$

$=7+(-1)+7^2\cdot(-1)^2=55$

• $1*(2*(-1))=1*(2+(-1)+2^2\cdot(-1)^2)$

$=1*5$

$=1+5+1^2\cdot 5^2=31$

$(1*2)*(-1)\neq 1*(2*(-1))$

ومنه: $*$ ليست تجميعية.

2) نبين أن المجموعة $\mathbb{R}$ تقبل عنصر حيادي بالنسبة للقانون $*$ يطلب حسابه:

?? $\exists e\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}: x*e=e*x=x$

بما أن: $*$ تبديلية، يكفي أخذ معادلة واحدة:

$x*e=x$

$\Rightarrow \cancel{x}+e+x^2e^2=\cancel{x}$

$\Rightarrow e(1+x^2e)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} e=0 \\ \vee \\ 1+x^2e=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e=0 \\ \vee \\ e=\frac{-1}{x^2} \end{cases}$

هذا من جهة، ولدينا من جهة أخرى:

$x*0=x+0+x^2\cdot 0^2=x$

بما أن: العنصر الحيادي وحيد، فإن:

$e=0\in\mathbb{R}$ هو العنصر الحيادي.

3) هل للعنصر (-2) نظير بالنسبة للقانون $*$؟

$\forall x\in\mathbb{R}, \exists x'\in\mathbb{R}: x*x'=x'*x=e$

$(-2)\in\mathbb{R}, \exists x'\in\mathbb{R}: (-2)*x'=x'*(-2)=0$

بما أن: $*$ تبديلية إذن يكفي أخذ معادلة واحدة:

$(-2)*x'=0$

$\Rightarrow (-2)+x'+(-2)^2\cdot x'^2=0$

$\Rightarrow 4x'^2+x'-2=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 4\cdot(-2)=33>0$

$x'_1=\frac{-1-\sqrt{33}}{8} \quad , x'_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$

إذن: للعنصر (-2) نظيران x'_1 ، x'_2 .

4) حل المعادلتين الجبريتين التاليتين:

• $1*x=1$.

$\Rightarrow \cancel{1}+x+1^2\cdot x^2=\cancel{1}$

$\Rightarrow x(1+x)=0$.

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \vee \\ 1+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \vee \\ x=-1 \end{cases}$

• $1*x=0$

$\Rightarrow 1+x+1^2\cdot x^2=0$

$\Rightarrow x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$

إذن: ليس للمعادلة حل في $\mathbb{R}$.

التمرين 03:

لتكن $(G,\circ)$ زمرة، H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان منها.

1) نبرهن أن: $(H_1\cap H_2)$ ز.ج من G :

لتكن $(G,*)$ زمرة، نقول أن H زمرة جزئية منها إذا تحقق:

① $\emptyset\neq H\subset G$

② $\forall x,y\in H: (x*y)\in H$

③ $\forall x\in H: x^{-1}\in H$

لتكن $(G,*)$ زمرة، نقول أن H زمرة جزئية منها إذا تحقق:

① $\emptyset\neq H\subset G$

② $\forall x,y\in H: (x*y^{-1})\in H$

لدينا: H_1 ز.ج من G $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \emptyset \neq H_1 \subset G & ① \\ \forall x,y\in H_1 : (x*y^{-1})\in H_1 & ② \end{cases}$

H_2 ز.ج من G $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \emptyset \neq H_2 \subset G & ① \\ \forall x,y\in H_2 : (x*y^{-1})\in H_2 & ② \end{cases}$

ونثبت أن: $(H_1\cap H_2)$ ز.ج من G أي اثبات أن:

① $\emptyset \neq (H_1\cap H_2)\subset G$

② $\forall x,y\in (H_1\cap H_2) : (x*y^{-1})\in (H_1\cap H_2)$

①

$$\left.\begin{matrix} H_1\subset G \\ \wedge \\ H_2\subset G \end{matrix}\right\} \Rightarrow (H_1\cap H_2)\subset G$$

$e_G\in H_1 \wedge e_G\in H_2 \Rightarrow e_G\in H_1\cap H_2 \Rightarrow H_1\cap H_2\neq\emptyset$.

② ليكن $x,y\in H_1\cap H_2$

$\Rightarrow x\in H_1\cap H_2 \wedge y\in H_1\cap H_2$

$\Rightarrow x\in H_1 \wedge x\in H_2 \wedge y\in H_1 \wedge y\in H_2$

$\Rightarrow \underbrace{x\in H_1 \wedge y\in H_1}_{H_1 \text{ ز.ج من } G} \wedge \underbrace{x\in H_2 \wedge y\in H_2}_{H_2 \text{ ز.ج من } G}$

$\Rightarrow (x*y^{-1})\in H_1 \wedge (x*y^{-1})\in H_2$

$\Rightarrow (x*y^{-1})\in H_1\cap H_2$

ومنه: $(H_1\cap H_2)$ ز.ج من G.

2) نبرهن أن:

$(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\overset{??}{\Leftrightarrow}$ $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$

① $H_2\subset H_1$ أو $H_1\subset H_2$ $\overset{??}{\Rightarrow}$ $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G

$$\begin{cases} H_1\subset H_2 \\ \vee \\ H_2\subset H_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1\cup H_2 = H_2 & (H_2 \text{ ز.ج من } G) \\ \vee \\ H_1\cup H_2 = H_1 & (\text{و } H_1 \text{ ز.ج من } G) \end{cases}$$

اذن: $H_2\subset H_1 \vee H_1\subset H_2 \Rightarrow (H_1\cup H_2)$ ز.ج من G

② $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\overset{??}{\Rightarrow}$ $H_1\subset H_2 \vee H_2\subset H_1$

نستخدم البرهان بالخلف، نفرض أن هذه القضية خاطئة، اذن: نفيها صحيح أي

$((H_1\cup H_2)$ ز.ج من $G) \wedge (H_1\not\subset H_2) \wedge (H_2\not\subset H_1)$ صحيح

$$\begin{cases} H_1\not\subset H_2 \\ \vee \\ H_2\not\subset H_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists h_1 : h_1\in H_1 \wedge h_1\notin H_2 \\ \vee \\ \exists h_2 : h_2\in H_2 \wedge h_2\notin H_1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} h_1\in H_1 \\ h_2\in H_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} h_1\in (H_1\cup H_2) & (\text{لأن } H_1\subset (H_1\cup H_2)) \\ h_2\in (H_1\cup H_2) & (\text{لأن } H_2\subset (H_1\cup H_2)) \end{cases}$$

$\Rightarrow (h_1\cdot h_2)\in (H_1\cup H_2)$ (لأن $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G)

$$\Rightarrow \begin{cases} (h_1\cdot h_2)\in H_1 \\ \vee \\ (h_1\cdot h_2)\in H_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1\cdot h_2\in H_1,\ h_1^{-1}\in H_1 & (\forall h_1\in H_1, \exists h_1^{-1}\in H_1 \Leftarrow G \text{ ز.ج من } H_1) \\ \vee \\ h_1\cdot h_2\in H_2,\ h_2^{-1}\in H_2 & (\forall h_2\in H_2, \exists h_2^{-1}\in H_2 \Leftarrow G \text{ ز.ج من } H_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\underbrace{h_1^{-1}\cdot h_1}_{e_G}\cdot h_2)\in H_1 \\ \vee \\ (h_1\cdot \underbrace{h_2\cdot h_2^{-1}}_{e_G})\in H_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_2\in H_1 \\ \vee \\ h_1\in H_2 \end{cases} \quad \text{تناقض}$$

اذن: $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من $G \Rightarrow H_1\subset H_2 \vee H_2\subset H_1$

ومنه: $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من $G \Leftrightarrow H_2\subset H_1 \vee H_1\subset H_2$

3) نعرف المجموعة $(H_1\cdot H_2)$ كما يلي:

$H_1\cdot H_2 = \{x\cdot y \ / \ x\in H_1 , y\in H_2\}$

نبين أن: $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G $\Leftrightarrow$ $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

① $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G $\Rightarrow$ $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

لدينا: $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G ونثبت أن: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

$H_1\cdot H_2 \overset{?}{\subset} H_2\cdot H_1$

ليكن $h\in (H_1\cdot H_2) \Rightarrow h^{-1}\in (H_1\cdot H_2)$ (لأن $H_1\cdot H_2$ ز.ج من G)

$\Rightarrow h^{-1} = h_1\cdot h_2 \ / \ h_1\in H_1 , h_2\in H_2$

$\Rightarrow h = (h_1\cdot h_2)^{-1}$

$\Rightarrow h = h_2^{-1}\cdot h_1^{-1} \in (H_2\cdot H_1)$

$$\begin{cases} h_2^{-1}\in H_2 \Leftarrow G \text{ ز.ج من } H_2 \\ h_1^{-1}\in H_1 \Leftarrow G \text{ ز.ج من } H_1 \end{cases}$$

اذن: $(H_1\cdot H_2)\subset (H_2\cdot H_1)$

$H_2\cdot H_1 \overset{?}{\subset} H_1\cdot H_2$

ليكن $h\in (H_2\cdot H_1) \Rightarrow h = h_2\cdot h_1 \ / \ h_2\in H_2 , h_1\in H_1$

$\Rightarrow h^{-1} = (h_2\cdot h_1)^{-1}$

$\Rightarrow h^{-1} = h_1^{-1}\cdot h_2^{-1} \in H_1\cdot H_2$

$\Rightarrow (h^{-1})^{-1}\in H_1\cdot H_2$ (لأن $H_1\cdot H_2$ ز.ج من G)

$\Rightarrow h\in H_1\cdot H_2$

اذن: $H_2\cdot H_1 \subset H_1\cdot H_2$

ومنه: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

وبالتالي: $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من $G \Rightarrow H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

② $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1 \overset{??}{\Rightarrow}$ $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G

لدينا : $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$

معناه : $\forall h_1,h_1'\in H_1, \forall h_2,h_2'\in H_2 : h_1\cdot h_2 = h_2'\cdot h_1'$

ونثبت أن : $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G :

1) $(H_1\cdot H_2)\subset G$.

* العنصر الحيادي وحيد $e = e\cdot e \quad / e\in H_1, e\in H_2$

$\Rightarrow e\in (H_1\cdot H_2) \Rightarrow H_1\cdot H_2 \neq \emptyset$

2) $\forall g,g'\in(H_1\cdot H_2) : g\cdot g' \in (H_1\cdot H_2)$??

$g\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow g = h_1\cdot h_2 \ / \ h_1\in H_1, h_2\in H_2$

$g'\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow g' = h_1'\cdot h_2' \ / \ h_1'\in H_1, h_2'\in H_2$

$g\cdot g' = (h_1\cdot h_2)\cdot(h_1'\cdot h_2')$

$= h_1\cdot \underbrace{h_2\cdot h_2''}\cdot h_1'$ (لأن: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$)

$= h_1\cdot h_2''\cdot h_1'$ ($h_2''\in H_2$)

$= \underbrace{h_1\cdot h_1'}\cdot h_2''$ (لأن: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$)

$= h_1''\cdot h_2'' \ / \ h_1''\in H_1, h_2''\in H_2$

إذن : $g\cdot g'\in H_1\cdot H_2$

3) $\forall g\in(H_1\cdot H_2) : g^{-1}\in(H_1\cdot H_2)$??

$g\in(H_1\cdot H_2) \Rightarrow g = h_1\cdot h_2 \ / \ h_1\in H_1, h_2\in H_2$

$\Rightarrow g^{-1} = (h_1\cdot h_2)^{-1}$

$\Rightarrow g^{-1} = h_2^{-1}\cdot h_1^{-1} \ / \ h_2^{-1}\in H_2, h_1^{-1}\in H_1$

$\Rightarrow g^{-1} = h_1'\cdot h_2'$ (لأن: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1$)

$\Rightarrow g^{-1}\in (H_1\cdot H_2)$

ومنه : $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1 \Rightarrow$ $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G

وبالتالي: $H_1\cdot H_2 = H_2\cdot H_1 \Leftrightarrow$ $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G .

التمرين 05: لتكن E مجموعة غير خالية .

1) نبين أن : $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ حلقة تبديلية :

$(A,+,\cdot)$ حلقة إذا تحقق :

① $(A,+)$ ز.ت .

② العملية $(\cdot)$ توزيعية على العملية $(+)$ من اليمين ومن اليسار :

$\forall x,y,z\in A : x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$

$\forall x,y,z\in A : (y+z)\cdot x = (y\cdot x)+(z\cdot x)$

③ العملية $(\cdot)$ تجميعية .

إضافة على ذلك :

* إذا كانت العملية $(\cdot)$ تبديلية $\Leftarrow$ A حلقة تبديلية .

* إذا كانت العملية $(\cdot)$ تقبل عنصر حيادي $\Leftarrow$ A حلقة واحدية .

$\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$:

$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

$= (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

$(A\Delta B)^c = \left((A\cup B)\cap(A\cap B)^c\right)^c$

$= (A\cup B)^c \cup \left((A\cap B)^c\right)^c$

$= (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$.

نستخدم التعريف :

$\forall A,B\in\mathcal{P}(E) : A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

① $(\mathcal{P}(E),\Delta)$ ز.ت :

1) Δ تجميعية :

$\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E) : (A\Delta B)\Delta C \overset{??}{=} A\Delta(B\Delta C)$

ليكن $A,B,C\in\mathcal{P}(E)$:

• $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cap C^c)\cup(C\cap(A\Delta B)^c)$

$= \left[((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))\cap C^c\right]\cup\left[C\cap((A^c\cap B^c)\cup(A\cap B))\right]$

$= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(B\cap A^c\cap C^c)\cup(C\cap A^c\cap B^c)\cup(C\cap A\cap B)$ ...(1)

• $A\Delta(B\Delta C) = (A\cap(B\Delta C)^c)\cup((B\Delta C)\cap A^c)$

$= \left[A\cap((B^c\cap C^c)\cup(B\cap C))\right]\cup\left[((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c))\cap A^c\right]$

$= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap B^c\cap A^c)$ ...(2)

ومنه: $(1)=(2)$ Δ تجميعية .

2) Δ تبديلية :

$\forall A,B\in\mathcal{P}(E) : A\Delta B \overset{??}{=} B\Delta A$

ليكن $A,B\in\mathcal{P}(E)$

$A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

$B\Delta A = (B\cap A^c)\cup(A\cap B^c)$

بما أن: الاتحاد تبديلي فإن : $A\Delta B = B\Delta A$

ومنه : Δ تبديلية

3) العنصر الحيادي :

$\exists X\in\mathcal{P}(E), \forall A\in\mathcal{P}(E) : A\Delta X = X\Delta A = A$??

بما أن : Δ تبديلية إذن : يكفي أخذ معادلة واحدة :

$A\Delta X = A$

$\Rightarrow (A\cap X^c)\cup(X\cap A^c) = A$.

نلاحظ أن : العنصر الحيادي هو $X=\emptyset\in\mathcal{P}(E)$ لأن :

$A\Delta\emptyset = (A\cap\emptyset^c)\cup\underline{(\emptyset\cap A^c)}$

$= (A\cap E)\cup\emptyset = A$

د) العنصر النظير:

$\forall A\in P(E), \exists A'\in P(E): A\Delta A' = A'\Delta A = X$

بما أن: Δ تبديلية، إذن: يكفي أخذ معادلة واحدة

$A\Delta A' = X$

$\Rightarrow (A\cap A'^c)\cup(A'\cap A^c) = \emptyset$.

نلاحظ أن: العنصر النظير هو $A'=A\in P(E)$ لأن:

$A\Delta A = (A\cap A^c)\cup(A^c\cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

ومنه: $(P(E),\Delta)$ ز.ت .

② العملية $(\cap)$ تجميعية:

$\forall A,B,C\in P(E): (A\cap B)\cap C \overset{??}{=} A\cap(B\cap C)$

محققة لأن: التقاطع تجميعي.

③ العملية $(\cap)$ تبديلية:

$\forall A,B\in P(E): A\cap B \overset{??}{=} B\cap A$

محققة لأن: التقاطع تبديلي.

④ العملية $(\cap)$ توزيعية على (Δ) من اليمين ومن اليسار:

$\forall A,B,C\in P(E): A\cap(B\Delta C) \overset{??}{=} (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$\forall A,B,C\in P(E): (B\Delta C)\cap A \overset{??}{=} (B\cap A)\Delta(C\cap A)$

بما أن: Δ تبديلية، إذن يكفي اثبات أحد التوزيعين:

$\forall A,B,C\in P(E): A\cap(B\Delta C) \overset{??}{=} (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

ليكن: $A,B,C\in P(E)$

- $A\cap(B\Delta C) = A\cap\big((B\cap C^c)\cup(C\cap B^c)\big)$
$= (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)$ ...(1)

- $(A\cap B)\Delta(A\cap C) = \big((A\cap B)\cap(A\cap C)^c\big)\cup\big((A\cap C)\cap(A\cap B)^c\big)$
$= \big((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)\big)\cup\big((A\cap C)\cap(A^c\cup B^c)\big)$
$= (A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap A^c)\cup(A\cap C\cap B^c)$
$= \emptyset\cup(A\cap B\cap C^c)\cup\emptyset\cup(A\cap C\cap B^c)$
$= (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)$ ...(2)

ومنه: (1)=(2) $(\cap)$ توزيعي على (Δ) من اليسار.

وبالتالي: $(P(E),\Delta,\cap)$ حلقة تبديلية.

2) ما هي العناصر القابلة للقلب بالنسبة لـ $(\cap)$؟

أي ايجاد العناصر التي لها نظير بالنسبة لـ $(\cap)$:

أولا: ايجاد العنصر الحيادي بالنسبة لـ $(\cap)$:

$\exists Y\in P(E), \forall A\in P(E): A\cap Y = Y\cap A = A$

بما أن: $\cap$ تبديلي يكفي أخذ معادلة واحدة:

$A\cap Y = A$

العنصر الحيادي بالنسبة لـ $(\cap)$ هو $Y=E\in P(E)$ لأن:

$E\cap Y = E$

ثانيا: ايجاد العناصر التي لها نظير بالنسبة لـ $(\cap)$

$\forall A\in P(E), \exists A_1\in P(E): A\cap A_1 = A_1\cap A = Y$

بما أن: $\cap$ تبديلي يكفي أخذ معادلة واحدة:

$A\cap A_1 = Y$

إذن: العنصر الوحيد القابل للقلب هو E

لأن: $E\cap E = E$

أي: المجموعات الجزئية التي تختلف عن E ليس لها نظير.

3) هل الحلقة تامة؟

> $(A,+,\cdot)$ حلقة تامة، إذا كان: $1_A \neq 0_A$ و
> $\forall x,y\in A: x\cdot y = 0_A \Rightarrow x = 0_A \vee y = 0_A$

حيث: 0_A: العنصر الحيادي لـ A بالنسبة للعملية $(+)$

1_A: " " لـ A " " $(\cdot)$

تكون $(P(E),\Delta,\cap)$ حلقة تامة إذا كان $1_{P(E)} \neq 0_{P(E)}$ $(E\neq\emptyset)$ و

$\forall A,B\in P(E): A\cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$??

$(P(E),\Delta,\cap)$ حلقة غير تامة إذا كان:

$\exists A,B\in P(E): A\cap B = \emptyset \wedge A\neq\emptyset \wedge B\neq\emptyset$??

ومنه: $(P(E),\Delta,\cap)$ ليست حلقة تامة

مثال مضاد:

$\exists A\in P(E), \exists A^c\in P(E): A\cap A^c = \emptyset$

لكن: $A\neq\emptyset$ و $A^c\neq\emptyset$.

التمرين 06:

ليكن الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$ نعرف المجموعة:

$E = \{a+b\sqrt{2} \ / a,b\in\mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

1) نبين أن: $\mathbb{Q}\subset E$??

$\forall a\in\mathbb{Q}: a = a + 0\cdot\sqrt{2} \in E$

إذن: $\mathbb{Q}\subset E$.

2) التحقق أن: $+$ عملية داخلية في E:

$\forall x,y\in E: (x+y)\in E$??

$x\in E \Rightarrow x = a+b\sqrt{2} \quad a,b\in\mathbb{Q}$

$y\in E \Rightarrow y = a'+b'\sqrt{2} \quad a',b'\in\mathbb{Q}$

$$= \underbrace{\frac{aa'-2bb'}{a'^2-2b'^2}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{a'b-ab'}{a'^2-2b'^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (x\cdot y^{-1})\in E$

ومنه : $(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من $(\mathbb{R},+,\cdot)$

تمارين اضافية عن الزمرة الجزئية :

التمرين 01: نزود المجموعة $\mathbb{R}-\{-2\}$ بعملية التركيب $*$ المعرفة كمايلي :

$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\} : x*y = xy+2(x+y)+2$

1) نبين أن : $(\mathbb{R}-\{-2\},*)$ زمرة تبديلية :

أولا : نبين أن : $*$ عملية تركيب داخلي في $\mathbb{R}-\{-2\}$:

> $*$ عملية تركيب داخلي على E إذا تحقق :
>
> $\forall x,y\in E : (x*y)\in E$

$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\} ; (x*y)\in\mathbb{R}-\{-2\}$??

لدينا : $x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}$ أي : $x\neq-2, y\neq-2$

فنبين أن : $(x*y)\in\mathbb{R}-\{-2\}$??

أي اثبات أن : $x*y\neq-2$??

نستخدم البرهان بالخلف، نفرض أن هذه القضية خاطئة، اذن نفيها صحيح

أي : $x*y=-2$

$\Rightarrow xy+2(x+y)+2=-2$

$\Rightarrow xy+2x+2y+2+2=0.$

$\Rightarrow xy+2x+2y+4=0.$

$\Rightarrow x(y+2)+2(y+2)=0.$

$\Rightarrow (x+2)(y+2)=0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \vee \\ y+2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \vee \\ y=-2 \end{cases} \text{ تناقض}$$

اذن : $x*y\neq-2$

أي : $(x*y)\in\mathbb{R}-\{-2\}$

ومنه : $*$ عملية تركيب داخلي في $\mathbb{R}-\{-2\}$.

$x+y=(a+b\sqrt{2})+(a'+b'\sqrt{2})$

$$= \underbrace{(a+a')}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(b+b')}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow (x+y)\in E.$

اذن : $+$ عملية داخلية في E.

3) التحقق أن : $\cdot$ عملية داخلية في E

$\forall x,y\in E : (x\cdot y)\in E$??

$x\in E \Rightarrow x=a+b\sqrt{2} \quad a,b\in\mathbb{Q}.$

$y\in E \Rightarrow y=a'+b'\sqrt{2} \quad a',b'\in\mathbb{Q}$

$x\cdot y=(a+b\sqrt{2})\cdot(a'+b'\sqrt{2})$

$=aa'+ab'\sqrt{2}+a'b\sqrt{2}+2bb'$

$$= \underbrace{(aa'+2bb')}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(ab'+a'b)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (x\cdot y)\in E$

اذن : $\cdot$ عملية داخلية في E.

4) نبين أن : $(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من $\mathbb{R}$:

> ليكن $(K,+,\cdot)$ حقل، $E\subset K$، نقول أن $(E,+,\cdot)$ حقل جزئي من $(K,+,\cdot)$ إذا كان :
>
> $\forall x,y\in E : (x-y)\in E$ ①
>
> $\forall x,y\in E : (x\cdot y^{-1})\in E$ ②

لدينا : $E\subset\mathbb{R}$.

$\forall x,y\in E : (x-y)\in E$?? ①

$x\in E \Rightarrow x=a+b\sqrt{2} \quad ,a,b\in\mathbb{Q}$

$y\in E \Rightarrow y=a'+b'\sqrt{2} \quad ,a',b'\in\mathbb{Q}$

$x-y=(a+b\sqrt{2})-(a'+b'\sqrt{2})$

$$= \underbrace{(a-a')}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(b-b')}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (x-y)\in E$

$\forall x\in E, \forall y\in E-\{0\} : (x\cdot y^{-1})\in E$?? ②

$x\in E \Rightarrow x=a+b\sqrt{2} \quad ,a,b\in\mathbb{Q}$

$y\in E-\{0\} \Rightarrow y=a'+b'\sqrt{2} \quad ,a',b'\in\mathbb{Q}$

$$x\cdot y^{-1}=(a+b\sqrt{2})\cdot\frac{1}{a'+b'\sqrt{2}}=\frac{a+b\sqrt{2}}{a'+b'\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(a+b\sqrt{2})(a'-b'\sqrt{2})}{a'^2-(b'\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{aa'-ab'\sqrt{2}+a'b\sqrt{2}-2bb'}{a'^2-2b'^2}$$

ثانيا: نبين أن: $(\mathbb{R}-\{-2\},*)$ ز.ت:

① * تجميعية: ليكن $x,y,z\in\mathbb{R}-\{-2\}$:

• $(x*y)*z=(xy+2(x+y)+2)*z$

$=(xy+2(x+y)+2)z+2[(xy+2(x+y)+2)+z]+2$

$=xyz+2xz+2yz+2z+2xy+4x+4y+4+2z+2$

$=xyz+2xz+2yz+2xy+4x+4y+4z+6$ ...(1)

• $x*(y*z)=x*(yz+2(y+z)+2)$

$=x(yz+2(y+z)+2)+2[x+(yz+2(y+z)+2)]+2$

$=xyz+2xy+2xz+2x+2x+2yz+4y+4z+4+2$

$=xyz+2xy+2xz+2yz+4x+4y+4z+6$ ...(2)

$(1)=(2)$ اذن: * تجميعية.

② * تبديلية: ليكن $x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}$

• $x*y=xy+2(x+y)+2$

• $y*x=yx+2(y+x)+2$

بما أن: الجمع والضرب تبديليان في $\mathbb{R}-\{-2\}$

فإن: $x*y=y*x$

ومنه: * تبديلية.

③ العنصر الحيادي:

$\exists e\in\mathbb{R}-\{-2\}$?? $,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}: x*e=e*x=x$

بما أن: * تبديلية، يكفي أخذ معادلة واحدة:

$x*e=x$

$\Rightarrow xe+2(x+e)+2=x$

$\Rightarrow xe+2x+2e+2-x=0$

$\Rightarrow x(e+1)+2(e+1)=0$

$\Rightarrow (x+2)(e+1)=0$

$x\neq-2\Rightarrow e+1=0$

$\Rightarrow e=-1\in\mathbb{R}-\{-2\}$

④ العنصر النظير:

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\},\ \exists x'\in\mathbb{R}-\{-2\}$?? $: x*x'=x'*x=e$

بما أن: * تبديلية، اذن يكفي أخذ معادلة واحدة:

$x*x'=e$

$\Rightarrow xx'+2(x+x')+2=-1$

$\Rightarrow xx'+2x+2x'+3=0$

$\Rightarrow x'(x+2)=-2x-3$

$x\neq-2\Rightarrow x'=\dfrac{-2x-3}{x+2}\in\mathbb{R}-\{-2\}$.

ومنه: $(\mathbb{R}-\{-2\},*)$ ز.ت.

2) لتكن المجموعة: $H=\{x\in\mathbb{R},\ x>-2\}$ $]-2,+\infty[$

نبين أن: H ز.ج من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

① * لدينا: $H\subset\mathbb{R}-\{-2\}$

* $e=-1\in H\Rightarrow H\neq\emptyset$

② $\forall x,y\in H: (x*y)\in H$??

$x\in H\Rightarrow x\in\mathbb{R},\ x>-2$

$y\in H\Rightarrow y\in\mathbb{R},\ y>-2$

اثبات أن: $(x*y)\in\mathbb{R},\quad x*y>-2$

لدينا: $(x*y)\in\mathbb{R}$ ، ونثبت أن:

$x*y+2>0$??

$x*y+2=(x*y)+2$

$=xy+2(x+y)+2+2$

$=xy+2x+2y+4$

$=x(y+2)+2(y+2)$

$=(x+2)(y+2)>0$

(لأن: $x>-2\Rightarrow x+2>0$ ، $y>-2\Rightarrow y+2>0$)

③ $\forall x\in H,\ x'=\dfrac{-2x-3}{x+2}\in H$??

لدينا: $x\in H\Rightarrow x\in\mathbb{R},\ x>-2$

ونثبت أن: $x'\in\mathbb{R},\ x'>-2$??

لدينا: $x'=\dfrac{-2x-3}{x+2}\in\mathbb{R}$

ونثبت أن: $x'+2>0$??

$x'+2=\dfrac{-2x-3}{x+2}+2$

$=\dfrac{-2x-3+2(x+2)}{x+2}$

$=\dfrac{-\cancel{2x}-3+\cancel{2x}+4}{x+2}$

$=\dfrac{1}{x+2}>0$

(لأن: $x>-2\Rightarrow x+2>0$)

ومنه: H ز.ج من $\mathbb{R}-\{-2\}$.

التمرين 2: لتكن المجموعة $G=]-\infty,1[$ ، نعرف على G العملية $*$ بالشكل:

$\forall a,b\in G: a*b=a+b-ab$

1) * نبين أن: $\forall a,b\in G:(a*b)-1<0$??

ليكن: $a,b\in G$

$(a*b)-1=a+b-ab-1$

$=(a-1)(1-b)$.

لدينا:

$a\in G\Rightarrow a\in]-\infty,1[\Rightarrow a<1\Rightarrow a-1<0.$

$b\in G\Rightarrow b\in]-\infty,1[\Rightarrow b<1\Rightarrow -b>-1$

$\Rightarrow 1-b>0$

اذن: $(a-1)(1-b)<0$

أي: $\forall a,b\in G: (a*b)-1<0$

* الاستنتاج: $\forall a,b\in G:$

$(a*b)-1<0\Rightarrow (a*b)<1$

$\Rightarrow (a*b)\in]-\infty,1[\Rightarrow (a*b)\in G$

اذن: $*$ عملية داخلية في G.

2) نبين أن: $(G,*)$ زمرة تبديلية:

* تجميعية: ليكن $a,b,c\in G$:

$(a*b)*c=(a+b-ab)*c$.

$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$.

$=a+b-ab+c-ac-bc+abc$

$=a+b+c-ab-ac-bc+abc\ ...(1)$

$a*(b*c)=a*(b+c-bc)$

$=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$

$=a+b+c-bc-ab-ac+abc\ ...(2)$

من (1) و(2) نجد: $(a*b)*c=a*(b*c)$

ومنه: $*$ تجميعية.

* تبديلية: ليكن $a,b\in G$:

$a*b=a+b-ab$.

$b*a=b+a-ba$.

لما أن الجمع والضرب تبديليان في G فإن

$a*b=b*a$

اذن: $*$ تبديلية.

* العنصر الحيادي:

$\exists e\in G,\forall a\in G: a*e=e*a=a$??

لما أن: $*$ تبديلية. اذن يكفي أخذ معادلة واحدة

$a*e=a$

$\Rightarrow \cancel{a}+e-ae=\cancel{a}$.

$\Rightarrow e(1-a)=0$.

لما أن: $1-a\neq 0$ (لأن: $a\in]-\infty,1[$) فإن:

$e=0\in G$.

* العنصر النظير:

$\forall a\in G,\exists a'\in G: a*a'=a'*a=e$??

لما أن: $*$ تبديلية اذن يكفي أخذ معادلة واحدة

$a*a'=e$

$\Rightarrow a+a'-aa'=0$

$\Rightarrow a'(1-a)=-a$.

$1-a\neq 0\Rightarrow a'=\frac{-a}{1-a}\in G$

(لأن: $a'-1=\frac{-a}{1-a}-1=\frac{-1}{1-a}<0\Rightarrow a'<1$
$\Rightarrow a'\in G$.)

ومنه: $(G,*)$ زمرة تبديلية.

3) هل المجموعة $H=[0,1[$ زمرة جزئية من G؟

$1,5$

$\exists a=0,5\in H$

لكن العنصر النظير لـ a: $a'=\frac{-a}{1-a}=\frac{-0,5}{1-0,5}=\frac{-0,5}{0,5}=-1\notin H$

اذن: H ليست زمرة جزئية من G.