جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

2022/03/29

السنة الأولى MI

مقياس جبر1

2022/2021

الامتحان الاستدراكي

التمرين 01:

I) ليكن التطبيق:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$$

1) احسب $f(\{ln2\}), f(\{0\})$.

2) احسب $f^{-1}(\{-2\}),\ f^{-1}\left(\left\{\frac{-3}{4}\right\}\right), f^{-1}(]-\infty, -1[)$.

3) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟ علل.

II) نرمز بـ $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.

2) عين صنف تكافؤ 0 (أي $\dot{0}$).

التمرين 02: لتكن المجموعة $G = \mathbb{R}$. نعرف على G العملية الداخلية $\star$ بالشكل:

$$\forall a, b \in G, \quad a \star b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

1) هل $\star$ تبديلية؟ هل $\star$ تجميعية؟ وتحقق أن 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $\star$.

2) هل للعنصر 2 نظير بالنسبة للعملية $\star$.

3) أعط شروط الزمرة الجزئية.

بالتوفيق

جامعة محمد خيضر بسكرة — السنة الأولى MI

ك.ع.د.ع.ط.ح — مقياس: جبر 1

قسم الرياضيات — 2022/2021

تصحيح الامتحان الاستدراكي

12/12

التمرين 01:

I) ليكن التطبيق:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = e^{2x} - 2e^{x}.$$

1) حساب:

* $f(\{0\}) = \{f(x) / x \in \{0\}\}$

1 $= \{f(0)\} = \{e^{2.0} - 2e^{0}\} = \{1-2\} = \{-1\}$

* $f(\{\ln 2\}) = \{f(x) / x \in \{\ln 2\}\}$

1 $= \{f(\ln 2)\} = \{e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2}\}$

$= \{e^{\ln 2^2} - 2.2\} = \{4-4\} = \{0\}.$

2) حساب:

* $f^{-1}(\{-2\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{-2\}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = -2\}.$

$f(x) = -2 \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} = -2$

1 $\Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 2 = 0$

نضع: $e^{x} = t$ نجد: $t^2 - 2t + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4 < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(\{-2\}) = \varnothing.$

* $f^{-1}(\{\frac{-3}{4}\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{\frac{-3}{4}\}\}$

1 $= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = \frac{-3}{4}\}.$

$f(x) = \frac{-3}{4} \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} + \frac{3}{4} = 0$

نضع: $e^{x} = t$ نجد: $t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0.$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.\frac{3}{4} = 4 - 3 = 1 > 0$

$t_1 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = e^{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$t_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{3}{2} = e^{x_2} \Rightarrow x_2 = \ln\frac{3}{2}.$

$\Rightarrow f^{-1}(\{\frac{-3}{4}\}) = \{-\ln 2, \ln\frac{3}{2}\}.$

* $f^{-1}(]-\infty,-1[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in]-\infty,-1[\}.$

$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) < -1\}.$

$f(x) < -1 \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} < -1.$ 1

$\Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 1 < 1$

$\Rightarrow (e^{x})^2 - 2e^{x} + 1 < 1$

$\Rightarrow (e^{x} - 1)^2 < 1$

$\Rightarrow f^{-1}(]-\infty,-1[) = \varnothing.$

3) * $\exists x_1 = -\ln 2 \in \mathbb{R}, \exists x_2 = \ln\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$

1 $f(-\ln 2) = f(\ln\frac{3}{2}) = \frac{-3}{4}$

لكن: $-\ln 2 \neq \ln\frac{3}{2}$

ومنه: f ليس متباين.

* وجدنا من السؤال (2) أن:

$\exists y = -2 \in \mathbb{R}$

لا يوجد x من $\mathbb{R}$ يحقق 1 $f(x) = -2$

ومنه: f ليس غامر.

II) نرمز بـ $\mathcal{R}$ العلاقة الثنائية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$

1) نبين أن: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$:

* $\mathcal{R}$ انعكاسية: ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا: 1 $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

اذن: $x\mathcal{R}x$ ومنه: $\mathcal{R}$ انعكاسية.

* $\mathcal{R}$ تناظرية: ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث:

$x\mathcal{R}y \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$

$\Rightarrow (1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 1$ 1,5

$\Rightarrow 2 - \sin^2 x - \cos^2 y = 1$

$\Rightarrow \cos^2 y + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow y\mathcal{R}x$

اذن: $\mathcal{R}$ تناظرية.

* $\mathcal{R}$ متعدية: ليكن $x, y, z \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2x+\sin^2y=1 \\ \wedge \\ \cos^2y+\sin^2z=1\end{cases}$$

بالجمع نجد:

$\cos^2x+\underbrace{\sin^2y+\cos^2y}+\sin^2z=2$ 1,5

$\Rightarrow \cos^2x+1+\sin^2z=2$

$\Rightarrow \cos^2x+\sin^2z=1$

$\Rightarrow x\mathcal{R}z$

اذن $\mathcal{R}$ متعدية.

ومنه: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.

2) تعيين صنف تكافؤ 0:

$\dot{0}=\{y\in\mathbb{R}/y\mathcal{R}0\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/\cos^2y+\sin^20=1\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/\cos^2y=1\}$

$=\{y\in\mathbb{R}/\cos y=\pm1\}$

$=\{y=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ 1

08/08

التمرين 02: لتكن $G=\mathbb{R}$، نعرف على G العملية الداخلية $*$ بالشكل:

$\forall a,b\in G,\ a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$

1) * هل $*$ تبديلية؟

لتكن $a,b\in G$:

$a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$

$b*a=ba+(b^2-1)(a^2-1)$ 1

بما أن: الضرب تبديلي في G فإن:

$a*b=b*a$

اذن: $*$ تبديلية.

* هل $*$ تجميعية؟

نأخذ المثال المضاد:

$\exists a=0,\exists b=2,\exists c=3$

حيث:

• $a*(b*c)=0*(2*3)$
$=0*(2\times3+(2^2-1)(3^2-1))$
$=0*30$
$=0\times30+(0^2-1)(30^2-1)=-899.$

• $(a*b)*c=(0*2)*3$
$=(0\times2+(0^2-1)(2^2-1))*3$
$=(-3)*3$
$=(-3)\times3+((-3)^2-1)(3^2-1)=55$ 1,5

$a*(b*c)=-899\neq55=(a*b)*c$

ومنه: $*$ ليست تجميعية.

* التحقق أن: 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لـ$(*)$.

$\exists 1\in G,\forall a\in G:\ 1*a=a*1=a$

بما أن: $*$ تبديلية يكفي التحقق من معادلة واحدة

$1*a=1\times a+(1^2-1)(a^2-1)$ 1,5
$=a+0\times(a^2-1)=a$

ومنه: 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لـ$(*)$.

2) هل للعنصر 2 نظير بالنسبة لـ$(*)$؟

$\forall a\in G,\exists a'\in G:\ a*a'=a'*a=1$

$a=2$

$a=2,\ \exists a'\in G:\ 2*a'=a'*2=1$

بما أن: $*$ تبديلية اذن:

$a'*2=1$

$\Rightarrow 2a'+(2^2-1)(a'^2-1)=1$ 2

$\Rightarrow 2a'+3a'^2-3=1$

$\Rightarrow 3a'^2+2a'-4=0$

$\Delta=2^2-4.3.(-4)=52$

$a'_1=\frac{-2-\sqrt{52}}{6}=\frac{-2-2\sqrt{13}}{6}=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$

$a'_2=\frac{-2+\sqrt{52}}{6}=\frac{-2+2\sqrt{13}}{6}=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

ومنه: للعنصر 2 نظيرين بالنسبة لـ $*$.

3) إعطاء شروط الزمرة الجزئية:

$(G,*)$ زمرة، نقول أن $(H,*)$ زمرة جزئية من G إذا تحقق:

① $\emptyset\neq H\subset G$

② $\forall x,y\in H:\ (x*y)\in H$

③ $\forall x\in H:\ x'\in H$

2

أو التعريف:

$(G,*)$ زمرة، نقول أن $(H,*)$ زمرة جزئية من G إذا تحقق:

① $\emptyset\neq H\subset G$

② $\forall x,y\in H:\ (x*y')\in H$