



الامتحان النهائي في الجبر 1

التمرين 01: [08 نقاط]

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: المعرف بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

ولتكن المجموعتان $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{0, 2\}$

(1) احسب $f(\mathbb{R}), f^{-1}(B), f(A)$.

(2) هل f متباين؟ علل.

(3) بين أن f غامر.

التمرين 02: [12 نقاط]

لتكن E مجموعة غير خالية، $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ (أي A, B, C أجزاء من E). نذكر أن:

$$A \setminus B = A \cap B^c \text{ و } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(1) تحقق أن: $A \Delta B = B \Delta A$ و أحسب $A \Delta \emptyset$ و $A \Delta A$.

(2) بين أن: $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ و أحسب $(A \Delta B)^c$.

(3) بين أن: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

(4) استنتج أن: $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ زمرة تبديلية.

(5) بين أن: $A = B \Delta C \Rightarrow B = A \Delta C$

(6) نعرف في $\mathcal{P}(E)$ العلاقة \mathcal{R} كما يلي:

$$ARB \Leftrightarrow \exists D \in \mathcal{P}(E): A = B \Delta D$$

بين أن: \mathcal{R} علاقة تكافؤ.

القرین الأول:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, f(-2) = 0, f(-1) = 4, f(0) = 2$$

$$f(1) = 0 \quad f(2) = 4 \quad (1)$$

$$f(A) = \{0, 2, 4\} \rightarrow (0, 2, 4)$$

$$B = \{0, 2\}, f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0 \vee f(x) = 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\}$$

$$= f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\})$$

نلاحظ من السؤال السابق ان $2 = 1 - 2$ جزان $f(x)$

اذ بعد التحليل على كتابة $f(x) = (x+2)(x-1)$ $(0, 1)$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{1, -2\} \quad (0, 1)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow f^{-1}(\{2\}) = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \quad (0, 1)$$

$$f^{-1}(B) = \{-2, -\sqrt{3}, 0, 1, \sqrt{3}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$$

ملاحظ

$$(0, 1) \leftarrow f(-2) = f(1) = 0$$

(2) f ليس متباين لان

$$(0, 1, 5) \leftarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

(3) f غير لان

التمرين الثاني:

$$\textcircled{0,5} \leftarrow A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A \quad (1)$$

$$\textcircled{0,5} \leftarrow A \Delta \phi = (A \setminus \phi) \cup (\phi \setminus A) = A \cup \phi = A$$

$$\textcircled{0,5} \leftarrow A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \phi \cup \phi = \phi$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \quad (2)$$

$$= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c]$$

$$= [(A \cup B) \cap (B \cup B^c)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)]$$

$$= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \leftarrow \textcircled{0,5}$$

$$(A \Delta B)^c = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c \leftarrow \textcircled{0,5} \text{ via } 9$$

$$= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

$$(A \Delta B) \Delta C = [(A \Delta B) \cap C^c] \cup [C \cap (A \Delta B)^c] \quad (3)$$

$$= [[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap C^c] \cup [C \cap [(A \cup B)^c \cup (A \cap B)]]$$

$$= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c)] \cup [C \cap A^c \cap B^c] \cup [C \cap A \cap B]$$

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C)$$

$\textcircled{0,5}$

$$A \Delta (B \Delta C) = [A \cap (B \Delta C)^c] \cup [(B \Delta C) \cap A^c]$$

$$= [A \cap ((B^c \cap C) \cup (B \cap C^c))] \cup [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A^c$$

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

بالمقارنة نجد أن \uparrow **011**

- (4) طرح خلال السؤال (1) A تبديلية \leftarrow **015**
 و طرح خلال السؤال (3) A قسمة \leftarrow **015**
 و طرح خلال السؤال (1) ϕ عنصر حيادي \leftarrow **015**
 وكل عنصر A ينظر هو نفسه $A \leftarrow$ **015**
 إذن $(P(E), \Delta)$ زمرة تبديلية

(5) إذا كان $A = B \Delta C$ فإن

$$\leftarrow$$
 01 $A \Delta C = (B \Delta C) \Delta C = B \Delta (C \Delta C) = B \Delta \phi = B$

(6) علاقة تكافؤ؟

$\forall A \in P(E) \quad A = A \Delta \phi$ الطبيعية؟

$A = A \Delta D$ $D = \phi$ إذن يوجد

\leftarrow **015** $A R A$ ومنه

إذن العلاقة

$ARB \Rightarrow BRA ?$

تساوية؟

$ARB \Rightarrow \exists D \in P(E) : A = B \Delta D$

$\Rightarrow B = A \Delta D$ (حس السؤال 5)

$\Rightarrow B R A \leftarrow$ **01**

$ARB \wedge BRC \Rightarrow \exists D, D' \in P(E) \begin{cases} A = B \Delta D \\ B = C \Delta D' \end{cases}$ بمقدوره؟

$\Rightarrow A = (C \Delta D') \Delta D = C \Delta (D \Delta D')$ $B = C \Delta D'$

(3)

$A R C \leftarrow$ **01** إذن