جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر1
2015/2014

الامتحان النهائي

التمرين 01: نعرف القانون $\star$ على المجموعة $E=\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$\forall x,y\in E:\ \ x\star y=x+y-xy$$

1. بين أن: $(E,\star)$ زمرة تبديلية.
2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ وكل n من $\mathbb{N}$ احسب:

$$x^{(n)}=\underbrace{x\star x\star\ldots\star x}_{(n\text{ مرة})}$$

التمرين 02: لتكن E مجموعة كيفية

1. بين أن $(\mathcal{P}(E),\subset)$ عبارة عن مجموعة مرتبة (أي أن علاقة الاحتواء $(\subset)$ هي علاقة ترتيب على $\mathcal{P}(E)$).
2. عين $\operatorname{Max}(\mathcal{P}(E))$ و $\operatorname{Min}(\mathcal{P}(E))$.
3. ليكن A,B عنصرين من $\mathcal{P}(E)$، عين $\operatorname{Inf}(A,B)$ و $\operatorname{Sup}(A,B)$.

التمرين 03: لتكن $(G,\star)$ و $(G',\top)$ زمرتان و $f:G\longrightarrow G'$ تشاكل زمري، أثبت أن:

1) $f(e)=e'$ و $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$.
2) H زمرة جزئية من $G \Leftarrow f(H)$ زمرة جزئية من G'.
3) f متباين $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker}(f)=\{e\}$.
4) f غامر $\Leftrightarrow$ $f(G)=G'$.

التمرين 04: ليكن التطبيق φ المعرف كما يلي:

$$\begin{aligned}\varphi:\ \mathbb{R}&\to]-1,1[\\ x&\mapsto\varphi(x)=\frac{x}{1+|x|}\end{aligned}$$

بين أن التطبيق φ تقابلي وعين تطبيقه العكسي.

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

التمرين 1 :

1) إثبات أن $(E,*)$ زمرة تبديلية

أ) $*$ عملية داخلية : $\forall x,y\in E \Rightarrow x*y\in E$

نفرض أن $x,y\in E$ و $x*y\notin E$ أي $x*y=1$ ومنه

$$x*y=1 \Rightarrow x+y-xy=1$$
$$\Rightarrow x(1-y)+y-1=0$$
$$\Rightarrow (1-y)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$ وهذا تناقض

إذن $x*y\in E \Rightarrow \forall x,y\in E$ ، ومنه $*$ عملية داخلية

ب) $*$ تبديلية :

$$\forall x,y\in E:\ x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$$

د) $*$ تجميعية :

$$\forall x,y,z\in E:\ (x*y)*z \overset{?}{=} x*(y*z)$$

لدينا

$$(x*y)*z=(x+y-xy)*z=x+y-xy+z-(x+y-xy)\cdot z$$
$$=x+y-xy+z-xz-yz+xyz \quad \text{--- ①}$$

$$x*(y*z)=x*(y+z-yz)=x+y+z-yz-x(y+z-yz)$$
$$=x+y+z-yz-xy-xz+xyz \quad \text{--- ②}$$

نلاحظ أن ① = ② . إذن $*$ تجميعية

د) العنصر الحيادي :

$$\exists e \in E, \forall x \in E : x * e = x$$

$$x * e = x \iff x + e - x e = x$$

$$\Rightarrow e(1-x) = 0 \Rightarrow e = 0$$

إذن $e = 0$ هو العنصر الحيادي

هـ) العنصر النظير :

$$(\forall x \in E), \exists x' \in E : x * x' = e$$

لدينا $x * x' = e \Rightarrow x + x' - x x' = e$

$$\Rightarrow x'(1-x) = -x$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-x}{1-x} \in E$$

ومنه نظير x هو $\frac{-x}{1-x}$

من ما سبق نلاحظ أن $(E,*)$ زمرة تبديلية

2) حساب $x^{(n)}$ حيث

$$x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ مرة}}$$

لدينا $x * y = x + y - x y$

$$\Rightarrow 1 - x * y = 1 - x + y - x y = -x(1-y) + (1-y)$$
$$= (1-y)(1-x) \quad \dots (1)$$

بأخذ $x = y$ نجد

$$1 - x * x = (1-x)^2$$

بقي إثبات أن

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} : 1 - x^{(n)} = (1-x)^n$$

بالتراجع من أجل $n=1$ نجد $1 - x = 1 - x$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

لدينا

$$1-x^{(n+1)} = 1 - x * x^{(n)}$$

حسب العلاقة ① بوضع $y=x^{(n)}$

$$= (1-x)(1-x^{(n)})$$
$$= (1-x)(1-x)^{n}$$
$$= (1-x)^{n+1}$$

<u>التمرين 2</u>: ① إثبات أن $\subset$ علاقة ترتيب على $\mathcal{P}(E)$

أ) $\subset$ علاقة إنعكاسية لأن $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset A$

ب) $\subset$ علاقة ضد تناظرية لأن

$$\forall A,B \in \mathcal{P}(E) : \begin{cases} A \subset B \\ \wedge \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

د) $\subset$ علاقة متعدية

$$\forall A,B,C \in \mathcal{P}(E) : \begin{cases} A \subset B \\ \wedge \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$$

2) تعيين $Max(\mathcal{P}(E))$ ، $Min(\mathcal{P}(E))$

نفرض أن

$$Max(\mathcal{P}(E)) = K \Leftrightarrow \begin{cases} K \in \mathcal{P}(E) \\ \wedge \\ \forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K = E$$

$$Min(\mathcal{P}(E)) = H \Leftrightarrow \begin{cases} H \in \mathcal{P}(E) \\ \wedge \\ \forall A \in \mathcal{P}(E) : H \subset A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow H = \phi$$

3)

$$\inf(A,B) = H \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ H \subset A \wedge H \subset B \\ \wedge \\ (ii)\ H \text{ أكبر مجموعة تحقق } (i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow H = A \cap B$$

$$\sup(A,B) = K \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ A \subset K \wedge B \subset K \\ \wedge \\ (ii)\ K \text{ أصغر مجموعة تحقق } (i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K = A \cup B$$

التمرين 03 $f:(G,*)\longrightarrow(G',T)$

① إثبات أن $f(e)\overset{?}{=}e'$

$e*e=e \Rightarrow f(e*e)=f(e)$

$\Rightarrow f(e)\,T\,f(e)=f(e)$

$\Rightarrow [f(e)]^{-1}\,T\,(f(e)\,T\,f(e))=[f(e)]^{-1}\,T\,f(e)$

$\Rightarrow e'\,T\,f(e)=e'$

$\Rightarrow f(e)=e'$

$f(x^{-1})\overset{?}{=}[f(x)]^{-1}$

لدينا

$x^{-1}*x=e$

$\Rightarrow f(x^{-1}*x)=f(e) \Rightarrow f(x^{-1})\,T\,f(x)=e'$

$\Rightarrow [f(x^{-1})\,T\,f(x)]\,T\,[f(x)]^{-1}=e'\,T\,[f(x)]^{-1}$

$\Rightarrow f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$

2) H ز.ز من G فإن f(H) ز.ز من G'

نفرض أن H ز.ز من G ونبين أن f(H) ز.ز من G'

أ) لدينا $e\in H \Rightarrow e'=f(e)\in f(H)$

ومنه $f(H)\neq\phi$

ب) $y_1,y_2\in f(H)\overset{?}{\Rightarrow} y_1\,T\,y_2\in f(H)$

$y_1,y_2\in f(H)\Rightarrow\begin{cases}y_1=f(x_1)\ /\ x_1\in H\\ y_2=f(x_2)\ /\ x_2\in H\end{cases}$

$y_1\,T\,y_2=f(x_1)\,T\,f(x_2)=f(\underbrace{x_1*x_2}_{\in H})\in f(H)$

د) $y \in f(H)$ فإن $y^{-1} \in f(H)$

$$y \in f(H) \Rightarrow \exists\, x \in H : y = f(x)$$

$$y^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(\underset{H}{x^{-1}}) \in f(H)$$

من أ و ب و د نستنتج أن $f(H)$ ز.ج من G'

3) f متباين $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{e\}$

أ) f متباين فإن $\ker(f) = \{e\}$

نفرض أن f متباين ونبين أن $\ker(f) = \{e\}$

بما أن $f(e) = e' \Rightarrow e \in \ker(f)$

$$x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow f(x) = f(e) \Leftrightarrow x = e$$

ومنه $\Rightarrow \ker f = \{e\}$

ب) $\ker(f) = \{e\}$ فإن f متباين

نفرض أن $\ker f = \{e\}$ ونبين أن f متباين

$$\forall\, x, x' \in G : \quad f(x) = f(x')$$

$$\Rightarrow f(x) \top [f(x')]^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow f(x \top (x')^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow x \top (x')^{-1} \in \ker f$$

$$\Rightarrow x \top (x')^{-1} = \{e\}$$

$$\Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

*) f غامر $\Leftarrow$ $f(G)=G'$

أ) f غامر $\Rightarrow$ $f(G)=G'$

نفرض أن f غامر ونبين أن $f(G)=G'$

$$y\in G' \Rightarrow \exists x\in G : f(x)=y \Rightarrow y\in f(G)$$

ب) $f(G)=G' \Rightarrow f$ غامر ، نفرض أن $f(G)=G'$ ونبين أن f غامر

$$y\in G' = f(G) \Leftrightarrow \exists x\in G : f(x)=y \Rightarrow$$ f غامر

ومنه f غامر

التمرين 4 :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$
$$x \longmapsto \varphi(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

أ) إثبات أن φ تقابل $\Leftrightarrow$

$$\forall y\in]-1,1[, \exists! x\in\mathbb{R} : \cancel{\varphi(x)}\, y=\frac{x}{1+|x|}$$

نلاحظ أن x و y لديهما نفس الإشارة

$$y\in [0,1[\quad : \quad y=\frac{x}{1+x}$$
$$\Rightarrow y+yx=x$$
$$\Rightarrow x(y-1)=-y$$
$$\Rightarrow x=\frac{-y}{y-1}=\boxed{\frac{y}{1-y}=x}$$

$$y\in]-1,0[\quad : \quad y=\frac{x}{1-x}$$
$$\Rightarrow y-yx=x$$
$$\Rightarrow x(-y-1)=-y \Rightarrow \boxed{x=\frac{y}{1+y}}$$

((6))

$$\forall y \in]-1,1[\; : \; x = \frac{1}{1-|y|}$$

ومنه φ تقابل

$$\varphi^{-1} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{1-|y|}$$

ب/ ⊛ φ متباينة؟

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$

نلاحظ أن: x_1, x_2 من نفس الإشارة،

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_2}{1+x_2} & x_1, x_2 \geq 0 \\ \dfrac{x_1}{1-x_1} = \dfrac{x_2}{1-x_2} & x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1) & x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) & x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \cancel{x_1 x_2} = x_2 + \cancel{x_1 x_2} & x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 - \cancel{x_1 x_2} = x_2 - \cancel{x_1 x_2} & x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 & x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 = x_2 & x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

إذن: φ متباينة.

⊛ φ غامرة؟

$\forall y \in]-1,1[, \exists x \in \mathbb{R} : y = \varphi(x)$?

$y = \varphi(x) \Rightarrow y = \dfrac{x}{1+|x|}$

نلاحظ أن: x و y من نفس الإشارة، إذن:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{1+x} & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ y = \dfrac{x}{1-x} & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(1+x) = x & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ y(1-x) = x & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + yx = x & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ y - yx = x & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yx - x = -y & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ -yx - x = -y & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-y}{y-1} & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ x = \dfrac{-y}{-y-1} & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{1-y} & x \geq 0, \; y \in [0,1[\\ x = \dfrac{y}{1+y} & x \leq 0, \; y \in]-1,0] \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{1-|y|}$$

$\Rightarrow \forall y \in]-1,1[, \exists x \in \mathbb{R} : y = \varphi(x) \quad \Rightarrow$ φ غامر