جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر1
2015/2014

الامتحان الاستدراكي

التمرين 01: نزود المجموعة $\mathbb{R}-\{2\}$ بعملية التركيب $\star$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2\}:\quad x\star y=-2(x+y)+xy+6$$

بين أن: $(\mathbb{R}-\{2\},\ \star)$ زمرة تبديلية.

التمرين 02: لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على R^* كما يلي:

$$\forall x,y\in\mathrm{R}^*: x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x.y>0$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على R^*.

2) عين أصناف تكافؤ كل من $1, 2, -1, -\sqrt{2}$ ثم عين مجموعة حاصل القسمة $\mathrm{R}^*/_{\mathcal{R}}$.

3) هل $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على R؟

التمرين 03: لتكن $(G\ ,.)$ زمرة بحيث H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان من G .

1. برهن أن $(H_1\cup H_2)$ زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $H_2\subset H_1$ أو $H_1\subset H_2$.
2. نعرف المجموعة $H_1.H_2$ كما يلي: $H_1.H_2=\{xy/\ x\in H_1, y\in H_2\}$

بين أن: $H_1.H_2$ زمرة جزئية من $G \Leftrightarrow H_1.H_2=H_2.H_1$.

التمرين 04: ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}\to[-1,1]$$
$$x\mapsto f(x)=sin(\pi x)$$

1. هل هذا التطبيق متباين؟ هل هو غامر؟ هل هو تقابلي؟
2. بين أن g الذي هو اقتصار f على $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ عبارة عن تقابل من $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ نحو $]-1,1[$.

بالتوفيق

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر 1
2015 / 2014

تصحيح الامتحان الاستدراكي

التمرين 01: نزود المجموعة $\mathbb{R}-\{2\}$ بعملية التركيب $*$ المعرفة كمايلي:

$\frac{5}{5}$

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2\}:\ x*y=-2(x+y)+xy+6.$$

نبين ان: $(\mathbb{R}-\{2\},*)$ زمرة تبديلية:

- أولا: اثبات أن: $*$ عملية داخلية:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2\}:(x*y)\in\mathbb{R}-\{2\}?$$

$x\in\mathbb{R}-\{2\}\Longrightarrow x\neq 2.$

$y\in\mathbb{R}-\{2\}\Longrightarrow y\neq 2.$

نثبت ان: $(x*y)\neq 2$?

نبرهن بالخلف: نفرض أن $x*y=2$ نجد:

$$\begin{aligned} x*y=2 &\Rightarrow -2(x+y)+xy+6=2.\\ &\Rightarrow -2x-2y+xy+4=0.\\ &\Rightarrow -2x+4-y(2-x)=0.\\ &\Rightarrow 2(-x+2)-y(2-x)=0.\\ &\Rightarrow (2-x)(2-y)=0.\\ &\Rightarrow \begin{cases}2-x=0\\ \vee\\ 2-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ \vee\\ y=2\end{cases}\ \text{تناقض} \end{aligned}$$

1

اذن: $x*y\neq 2$ أي: $(x*y)\in\mathbb{R}-\{2\}$

ومنه: $*$ عملية داخلية.

- ثانيا: اثبات أن $(\mathbb{R}-\{2\},*)$ زمرة تبديلية.

① $*$ تبديلية:

$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2\}:$

$$\begin{aligned} x*y&=-2(x+y)+xy+6.\\ &=-2(y+x)+yx+6\quad (\text{لأن الجمع والضرب تبديليان في } \mathbb{R})\\ &=y*x. \end{aligned}$$

1

اذن: $*$ تبديلية.

② $*$ تجميعية:

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{2\}:$

$$\begin{aligned} (x*y)*z&=(-2(x+y)+xy+6)*z.\\ &=-2\left[(-2(x+y)+xy+6)+z\right]+\left[-2(x+y)+xy+6\right]z+6.\\ &=-2(-2x-2y+xy+6+z)+-2xz-2yz+xyz+6z+6.\\ &=4x+4y-2xy-12-2z-2xz-2yz+xyz+6z+6.\\ &=4x+4y+4z-2xy-2xz-2yz+xyz-6.\quad ..(\mathrm{I}) \end{aligned}$$

1

$$x * (y * z) = x * [-2(y+z) + yz + 6]$$
$$= -2[x + (-2(y+z) + yz + 6)] + x[-2(y+z) + yz + 6] + 6.$$
$$= -2x + 4y + 4z - 2yz - 12 - 2xy - 2xz + xyz + 6x + 6.$$
$$= 4x + 4y + 4z - 2yz - 2xy - 2xz + xyz - 6 \dots (\mathrm{II})$$

من (I) و (II) نجد : $*$ تجميعية .

③ العنصر الحيادي : $\exists e \in \mathbb{R}-\{2\}, \forall x \in \mathbb{R}-\{2\} : x * e = e * x = x$

بما أن : $*$ تبديلية اذن : $x * e = x$

$$\Rightarrow -2(x+e) + xe + 6 = x.$$
$$\Rightarrow -2x - 2e + xe + 6 - x = 0.$$
$$\Rightarrow e(-2+x) = +3x - 6.$$
$$x \neq 2 \Rightarrow e = \frac{3x-6}{x-2} = 3 \Rightarrow \boxed{e=3} \in \mathbb{R}-\{2\}.$$

1

④ العنصر النظير : $\forall x \in \mathbb{R}-\{2\}, \exists x' \in \mathbb{R}-\{2\} : x * x' = x' * x = e$

بما أن : $*$ تبديلية اذن : $x * x' = e$.

$$\Rightarrow -2(x+x') + xx' + 6 = 3.$$
$$\Rightarrow -2x - 2x' + xx' = -3$$
$$\Rightarrow x'(-2+x) = -3 + 2x.$$
$$x \neq 2 \Rightarrow x' = \frac{-3+2x}{-2+x} = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{R}-\{2\}.$$

1

(لأن : $\frac{2x-3}{x-2} = 2 \Rightarrow 2x-3 = 2x-4 \Rightarrow -3 = -4$ مستحيل)

ومنه : $(\mathbb{R}-\{2\}, *)$ زمرة تبديلية .

<u>التمرين الثاني</u> : لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

5/5

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \cdot y > 0.$$

1) تبيين أن : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$:

* $\mathcal{R}$ انعكاسية : $0{,}5$ $\forall x \in \mathbb{R}^* : x^2 > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x$

* $\mathcal{R}$ تناظرية :

$0{,}5$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : x\mathcal{R}y \Rightarrow x \cdot y > 0$
$\Rightarrow y \cdot x > 0$ (لأن الضرب تبديلي في $\mathbb{R}$)
$\Rightarrow y\mathcal{R}x.$

* $\mathcal{R}$ متعدية :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$:

$$0{,}5 \quad \left.\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \cdot y > 0 \\ \wedge \\ y \cdot z > 0 \end{array}\right. \Rightarrow xy^2z > 0 \Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه : $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$.

2) تعيين أصناف التكافؤ لكل من :

$$0{,}5 \quad \dot{1} = \{y \in \mathbb{R}^* / y\mathcal{R}1\} = \{y \in \mathbb{R}^* / y \cdot 1 > 0\} = \{y \in \mathbb{R}^* / y > 0\} = \mathbb{R}^*_+$$

0,5 $\dot{2} = \{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}2\} = \{y\in\mathbb{R}^*/2y>0\} = \{y\in\mathbb{R}^*/y>0\} = \mathbb{R}^*_+$.

0,5 $\dot{(-1)} = \{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}(-1)\} = \{y\in\mathbb{R}^*/-y>0\} = \{y\in\mathbb{R}^*/y<0\} = \mathbb{R}^*_-$.

0,5 $\dot{(-\sqrt{2})} = \{y\in\mathbb{R}^* / y\mathcal{R}(-\sqrt{2})\} = \{y\in\mathbb{R}^*/-\sqrt{2}\,y>0\} = \{y\in\mathbb{R}^*/y<0\} = \mathbb{R}^*_-$.

- ومنه : $\mathbb{R}^*/\mathcal{R} = \{\mathbb{R}^*_+ , \mathbb{R}^*_-\}$. 0,5

3) $\mathcal{R}$ ليست علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$ لأن $\mathcal{R}$ ليست انعكاسية مثلا العنصر 0 :

0,5 $0.0 \not> 0 \Rightarrow 0 \not\mathcal{R} 0$

التمرين 03 (6%) لتكن $(G,.)$ زمرة بحيث H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان من G .

1) نبرهن أن : $(H_1\cup H_2)$ زمرة جزئية من G $\Leftrightarrow$ $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$

* $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G

$\left.\begin{array}{l} H_1\subset H_2 \\ \vee \\ H_2\subset H_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1\cup H_2 = H_2 \\ \vee \\ H_1\cup H_2 = H_1 \end{array}$ وهي ز.ج من G / وهي ز.ج من G 1

اذن : $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$ $\Longrightarrow$ $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G

* $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\Longrightarrow$ $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$

نستخدم البرهان بالخلف :

نفرض ان القضية خاطئة اذن نفيها صحيحة أي :

$(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\wedge\ H_1\not\subset H_2 \wedge H_2\not\subset H_1$

$\left\{\begin{array}{l} H_1\not\subset H_2 \\ \vee \\ H_2\not\subset H_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists h_1 : h_1\in H_1 \wedge h_1\notin H_2 . \\ \exists h_2 : h_2\in H_2 \wedge h_2\notin H_1 . \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} h_1\in H_1 \Rightarrow h_1\in (H_1\cup H_2) \qquad (H_1\subset H_1\cup H_2) . \\ h_2\in H_2 \Rightarrow h_2\in (H_1\cup H_2) \qquad (H_2\subset H_1\cup H_2) . \end{array}\right.$

$\Rightarrow h_1.h_2 \in (H_1\cup H_2)$ (لأن : $H_1\cup H_2$ ز.ج من G) 2

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h_1.h_2\in H_1 \\ \vee \\ h_1.h_2\in H_2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h_1.h_2\in H_1 ,\ h_1^{-1}\in H_1 \qquad (\forall h_1\in H_1, \exists h_1^{-1}\in H_1 \Leftarrow H_1 \text{ ز.ج من } G) \\ \vee \\ h_1.h_2\in H_2 ,\ h_2^{-1}\in H_2 \qquad (\forall h_2\in H_2, \exists h_2^{-1}\in H_2 \Leftarrow H_2 \text{ ز.ج من } G) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h_1^{-1}.h_1.h_2\in H_1 \\ \vee \\ h_1.h_2.h_2^{-1}\in H_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} h_2\in H_1 \\ \vee \\ h_1\in H_2 \end{array}\right.$ تناقض

اذن : $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\Rightarrow$ $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$

ومنه : $(H_1\cup H_2)$ ز.ج من G $\Longleftrightarrow$ $H_1\subset H_2$ أو $H_2\subset H_1$.

ج) نعرف المجموعة $H_1\cdot H_2$ كما يلي :

$$H_1\cdot H_2=\{x\cdot y \,/\, x\in H_1 ,\, y\in H_2\}$$

نبين أن : $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من $G \iff H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$?

⊛ $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من $G \overset{?}{\Longrightarrow} H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$

$$H_1\cdot H_2\subset H_2\cdot H_1 \,?$$

ليكن $h\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow h^{-1}\in H_1\cdot H_2$ (لأن $H_1\cdot H_2$ ز.ج من G)

$\Rightarrow h^{-1}=h_1\cdot h_2 \,/\, h_1\in H_1 ,\, h_2\in H_2$

0,75 $\Rightarrow h=(h_1\cdot h_2)^{-1}$

$\Rightarrow h=h_2^{-1}\cdot h_1^{-1}\in(H_2\cdot H_1)$ $\left(\begin{array}{l} h_2^{-1}\in H_2 \Leftarrow H_2 \text{ ز.ج من } G \\ h_1^{-1}\in H_1 \Leftarrow H_1 \text{ ز.ج من } G\end{array}\right)$

إذن : $(H_1\cdot H_2)\subset(H_2\cdot H_1)$

$$H_2\cdot H_1\subset H_1\cdot H_2 \,?$$

ليكن $h\in H_2\cdot H_1 \Rightarrow h=h_2\cdot h_1 \,/\, h_2\in H_2 ,\, h_1\in H_1$

$\Rightarrow h^{-1}=(h_2\cdot h_1)^{-1}$

0,75 $\Rightarrow h^{-1}=h_1^{-1}\cdot h_2^{-1}\in H_1\cdot H_2$

$\Rightarrow (h^{-1})^{-1}\in H_1\cdot H_2$ (لأن $H_1\cdot H_2$ ز.ج من G)

$\Rightarrow h\in H_1\cdot H_2$

إذن : $(H_2\cdot H_1)\subset(H_1\cdot H_2)$

ومنه : $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من $G \Rightarrow H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$

⊛ $H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1 \Rightarrow G$ ز.ج من $(H_1\cdot H_2)$

لدينا : $H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$ معناه : $\forall h_1,h_1'\in H_1 ,\, \forall h_2,h_2'\in H_2 : h_1\cdot h_2=h_2'\cdot h_1'$

اثبات أن : $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G ?

① ⊛ $H_1\cdot H_2\subset G$

⊛ $H_1\cdot H_2\neq\varnothing$ لأن : $e=e\cdot e \,/\, e\in H_1 ,\, e\in H_2$ (العنصر الحيادي وحيد) 0,5

$\Rightarrow e\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow H_1\cdot H_2\neq\varnothing$

② $\forall\, g,g'\in H_1\cdot H_2 : g\cdot g'\in H_1\cdot H_2\,?$

$g\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow g=h_1\cdot h_2 \,/\, h_1\in H_1 ,\, h_2\in H_2$

$g'\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow g'=h_1'\cdot h_2' \,/\, h_1'\in H_1 ,\, h_2'\in H_2$ 0,5

$g\cdot g'=(h_1\cdot h_2)\cdot(h_1'\cdot h_2')=h_1\cdot \underbrace{h_2\cdot h_2'}\cdot h_1'$ (لأن : $(H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1)$)

$=h_1\cdot h_2''\cdot h_1'$ $(h_2''\in H_2)$

$=h_1\cdot h_1'\cdot h_2''$ (لأن $(H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1)$)

$=h_1''\cdot h_2'' ,\, h_1''\in H_1 ,\, h_2''\in H_2$

إذن : $gg'\in H_1\cdot H_2$.

$\forall g\in H_1\cdot H_2 : g^{-1}\in H_1\cdot H_2$? (3)

$g\in H_1\cdot H_2 \Rightarrow g=h_1\cdot h_2 \ / \ h_1\in H_1 , h_2\in H_2$

$\Rightarrow g^{-1}=(h_1\cdot h_2)^{-1}$

$\Rightarrow g^{-1}=h_2^{-1}\cdot h_1^{-1} \ / \ h_2^{-1}\in H_2 , h_1^{-1}\in H_1$.

0,5 $\Rightarrow g^{-1}=h_1^{-1}\cdot h_2^{-1} \ / \ H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$.

$\Rightarrow g^{-1}\in H_1\cdot H_2$.

ومنه : $H_1\cdot H_2$ ز.ج من G $\Leftarrow$ $H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$

وبالتالي : $(H_1\cdot H_2)$ ز.ج من G $\iff$ $H_1\cdot H_2=H_2\cdot H_1$.

<u>التمرين 04</u> : ليكن التطبيق f المعرف كما يلي : 4/4

$f:\mathbb{R}\longrightarrow[-1,1]$

$x\longmapsto f(x)=\sin(\pi x)$

1) هل هذا التطبيق متباين ؟

لدينا : $f(0)=f(1)=0$ بينما : $0\neq 1$ 1

اذن : f ليس متباين .

هل هذا التطبيق غامر ؟

لدينا : $f(\mathbb{R})=[-1,1]$ 1 (ملاحظة أنها محققة) .

اذن : f غامر .

هل هذا التطبيق تقابلي ؟

f غامر وليس متباين ومنه : f ليس تقابلي . 1

2) نبين أن g الذي هو اقتصار f على $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ عبارة عن تقابل من $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ نحو $]-1,1[$:

الاقتصار g تقابل لأن :

من أجل كل $y\in]-1,1[$ ، المعادلة : $\sin(\pi x)=b$ تقبل حل وحيد

$x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. 1

5