جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس الجبر 1
2013/2012

الامتحان الاستدراكي

التمرين1 8

لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : xRy \Leftrightarrow \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}$$

1- بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ 3

2- أوجد $\dot{3}, \dot{2}, \dot{1}, \dot{0}$ 4 ثم استنتج عناصر المجموعة $\mathbb{N}/\mathcal{R}$ 1

التمرين2 6 ليكن $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ تطبيق

1) بين بمثال أن المساواة $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ غير صحيحة دائما 2

حيث $B \subset E, A \subset E$

2) بين أن:

أ- $\forall A \epsilon \mathcal{P}(E) : A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$ 2

ب- $\forall B \epsilon \mathcal{P}(F) : f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(E)$ 2

التمرين3 6

لتكن $(G,.)$ و $(G',.)$ زمرتان و $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$ تشاكل زمري

1) بين أن

$$f(e) \overset{1}{=} e' \text{ و } f\left(x^{-1}\right) \overset{1}{=} \left[f(x)\right]^{-1}$$

2) بين أن

$$\mathrm{Ker}(f) = \{e\} \overset{2}{\Leftrightarrow} f \text{ متباين}$$

3) بين أن

$$f(G) = G' \overset{2}{\Leftrightarrow} f \text{ غامر}$$

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

التمرين 1 : لتكن $\mathcal{R}$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\forall x,y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}$$

1) إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ

أ) - $\mathcal{R}$ إنعكاسية

$$\forall x \in \mathbb{N} : \frac{2x+x}{3} = x \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}x$$ (1)

ب)

$$\forall x,y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}$$

نفرض أن $x\mathcal{R}y$ أي $\frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}$ ونبين أن

$y\mathcal{R}x$ ؟ أي $\frac{2y+x}{3} \in \mathbb{N}$

لدينا

$$\frac{2y+x}{3} = \frac{2(y+2x)-3x}{3}$$

$$= 2\left(\frac{y+2x}{3}\right) - x$$ (1)

بما أن $\frac{y+2x}{3} \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{N}$ و $\frac{2y+x}{3}$ عدد موجب

إذن $\frac{2y+x}{3} \in \mathbb{N}$ ومنه $y\mathcal{R}x$

ج) $\mathcal{R}$ متعدية

$$\forall x,y,z \in \mathbb{N} : \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N} \\ \wedge \\ \frac{2y+z}{3} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ومنه

$$\frac{2x+y}{3} + \frac{2y+z}{3} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+z}{3} + y \in \mathbb{N} \ / \ y \in \mathbb{N}$$ (1)

$$\Rightarrow \frac{2x+z}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

2) $\dot{0} = \{y \in \mathbb{N} : y\mathcal{R}0\} = \{y \in \mathbb{N} : \frac{2y}{3} \in \mathbb{N}\}$

$3 \mid 2y \Rightarrow 3 \mid y$ (وهذا حسب غوص لأن $3 \wedge 2 = 1$)

$\Rightarrow y = 3n \;/\; n \in \mathbb{N}$!

$\dot{0} = 3\mathbb{N}$

$\dot{1} = \{y \in \mathbb{N} : y\mathcal{R}1\} = \{y \in \mathbb{N} : \frac{2y+1}{3} \in \mathbb{N}\}$

$$\frac{2y+1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2y+1+2-2}{3} \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \frac{2(y-1)+3}{3} \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \frac{2(y-1)}{3} + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2(y-1)}{3} \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \frac{y-1}{3} \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow y - 1 = 3k,\; k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow y = 3k + 1$$

1

$\dot{1} = 3\mathbb{N} + 1$

وهكذا نتحصل على

$\dot{2} = 3\mathbb{N} + 2$ (1) , $\dot{3} = 3\mathbb{N}$ (1)

ومنه

$$\mathbb{N}/\mathcal{R} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$$

1

التمرين 2 | ليكن $f : E \to F$ تطبيق

1) إعطاء مثال يبين أن المساواة $f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)$
غير محققة دوما

مثال

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^2$$

$A = [-2, 1] \longrightarrow f(A) = [0, 4]$

$B = [-1, 2] \longrightarrow f(B) = [0, 4]$

$A \cap B = [-1, 1] \longrightarrow f(A\cap B) = [0, 1] \neq f(A)\cap f(B) = [0, 4]$

2) إثبات أن

أ) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset f^{-1}(f(A))$

ليكن

$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

ب) $\forall B \in \mathcal{P}(E) : f(f^{-1}(B)) \overset{?}{=} B \cap f(E)$

① $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$

ليكن

$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) : f(x) = y$

1

$(f^{-1}(B) \subset E)$ $\Rightarrow (x \in E \wedge f(x) = y) \wedge f(x) \in B$

$\Rightarrow f(x) \in f(E) \wedge f(x) \in B \wedge f(x) = y$

$\Rightarrow y \in f(E) \wedge y \in B$

$\Rightarrow y \in f(E) \cap B$

② $B \cap f(E) \subset f(f^{-1}(B))$

4) $y \in B \cap f(E) \Rightarrow y \in f(E) \wedge y \in B$

$$\Rightarrow \exists x \in E : f(x) = y \wedge y \in B$$

$$\Rightarrow f(x) \in B \wedge f(x) = y \wedge x \in E$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge f(x) = y$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \,/\, f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(f^{-1}(B)) .$$

التمرين 3

$f : G \to G'$ تشاكل زمري

1) إثبات أن

أ) إثبات أن $f(e) = e'$

لدينا

$$e \cdot e = e$$

$\overset{\text{لأن } f \text{ تطبيق}}{\Rightarrow}$ $f(e \cdot e) = f(e)$ $\overset{\text{لأن } f \text{ تشاكل}}{\Rightarrow}$ $f(e) \cdot f(e) = f(e)$

$$\Rightarrow f(e) \cdot f(e) \cdot [f(e)]^{-1} = f(e) \cdot [f(e)]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(e) \cdot e' = e'$$

$$\Rightarrow f(e) = e'$$

ب) إثبات أن $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

لدينا

$$x \cdot x^{-1} = e$$

$\Rightarrow f(x \cdot x^{-1}) = f(e) \Rightarrow f(x) \cdot f(x^{-1}) = e'$

(بتركيب $[f(x)]^{-1}$ من اليسار) $\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

2) إثبات أن

① f متباين $\Leftrightarrow$ ② $\ker f = \{e\}$

$(1) \Rightarrow (2)$ نفرض أن f متباين

ونبين أن $\ker f = \{e\}$

لدينا $e \in \ker f$ (لأن $f(e) = e'$)

ليكن $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = e' = f(e)$

$\Rightarrow x = e$ لأن f متباين

ومنه $\ker f = \{e\}$

$(2) \Rightarrow (1)$ نفرض أن $\ker f = \{e\}$ ونبين أن f متباين

ليكن $x, x' \in G$ حيث

$$f(x) = f(x')$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot [f(x')]^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(x'^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow f(x \cdot x'^{-1}) = e'$$

$$\Rightarrow x \cdot x'^{-1} \in \ker f = \{e\}$$

$$\Rightarrow x \cdot x'^{-1} = e \Rightarrow x = x'$$

③ إثبات أن ① f غامر $\Leftrightarrow$ ② $f(G) = G'$

$(1) \Rightarrow (2)$ نفرض أن f غامر ونبين أن $G' \subset f(G)$

$f(G) \subset G'$ دومًا لأن f تطبيق

$$y \in G' \Rightarrow \exists\, x \in G : f(x) = y$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(G) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(G)$$

$(2) \Rightarrow (1)$