تمرين 1: ليكن التطبيق f المعرف كمايلي:

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}/\{0,1,2\}$$
$$x \longmapsto y = \frac{2x+1}{x-1}$$

1. عين مجموعة التعريف D_f لـ f
2. برهن أن f تطبيق تقابلي من D_f إلى $\mathbb{R}/\{0,1,2\}$.
3. عين التطبيق العكسي f^{-1} لـ f.
4. أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}.$$

التمرين 2: لتكن العلاقة R المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$x, y \in \mathbb{R} : xRy \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

1. برهن أن R علاقة تكافؤ
2. عين أصناف التكافؤ: $a \in \mathbb{R}^* / a$ و $-2, 2, -1, 1$
3. أحسب النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin(x) - x}$$

التمرين 3: لتكن الدالة f المعرفة كمايلي:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{x+1}$$

1. عين مجموعة تعريف f
2. أوجد نهايات الدالة f عند $x_1 = -1$ و $x_0 = 0$
3. هل الدالة مستمرة عند $x_0 = 0$, $x_1 = -1$
4. هل يمكن تمديد الدالة عند $x_0 = 0$ و $x_1 = -1$ ؟

التمرين 04: لتكن الدالة f المعرفة كمايلي:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$$

① أوجد مجموعة تعريف f.

② أوجد نهايات الدالة f عند $x_0=2$ و $x_1=-1$

③ لتكن الدالة g المعرفة كمايلي

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & si\ -1\leq x<2 \\ \sin(x+1) & si\ x<-1 \end{cases}$$

ⓐ هل الدالة g مستمرة عند $x_0=-1$ ؟

ⓑ على أي مجال الدالة g مستمرة (استنتاج)؟

التمرين 05: ليكن التطبيق f المعرف كمايلي:

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y=\ln(x+1)$$

① عين D_f مجموعة تعريف f.

② برهن أن التطبيق f تقابلي من D_f إلى $\mathbb{R}$.

③ عين التطبيق العكسي f^{-1}

④ احسب النهاية التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

التمرين 06: لتكن العلاقة R المعرفة كمايلي:

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}: xRy \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{N}$$

① بين أن العلاقة R علاقة ترتيب

② هل R ترتيب جزئي أو كلي

③ احسب النهاية التالية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$$

EXO1 : $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}/\{0,1,2\}$.

$x \longmapsto y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(1 pt)

① $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} \Rightarrow D_f =]-\infty, +1[\cup]1, +\infty[$.

② f est bijective ? $\begin{cases} \text{f est injective ?} \\ \wedge \ \text{f est surjective ?} \end{cases}$

ⓐ f est injective ?

soit x_1 et $x_2 \in D_f$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

(2 pts)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{2x_2+1}{x_2-1}$

$\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$

$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2} - 2x_1 + x_2 \cancel{-1} = \cancel{2x_2x_1} - 2x_2 + x_1 \cancel{-1}$

$\Rightarrow -2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1$

$\Rightarrow \cancel{3}x_1 = \cancel{3}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f est injective (*)

ⓑ f est surjective soit $y \in \mathbb{R}/\{1,2,0\}$. tq $y = f(x)$

$y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+1$

$\Rightarrow yx - y = 2x+1 \Rightarrow yx - 2x = 1+y$.

(2 pts)

$\Rightarrow x(y-2) = y+1 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{y+1}{y-2}}$ —— (1)

on remarque que $\forall y \in \mathbb{R}/\{0,1,2\}\ \exists x \in D_f$

tq $y = f(x) \Rightarrow$ f est surjective —— (**)

de (*) et (**) $\Rightarrow$ f est bijective. → (1 pt.)

③ d'après (1) on a $x = \dfrac{y+1}{y-2} \Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R}/\{0,1,2\} \longrightarrow D_f$

(2 pts) $x \longmapsto y = \dfrac{x+1}{x-2}$

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{2x} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin(x)}{2} = 0.$

(2 pts)

$\lim \frac{x^2}{\sin x + x} = \begin{matrix} +\infty & 0^- \\ -\infty & 0^+ \end{matrix}$

3pts.

EXO2 :

$x, y \in \mathbb{R}$: $x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

① R est une équivalence $\Leftrightarrow \begin{cases} R \text{ est reflexive.} \\ R \text{ est symétrique.} \\ R \text{ est transitive.} \end{cases}$

ⓐ R reflexive ?

1 pt

on a $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| = |x| \Leftrightarrow x R x \Leftrightarrow$ R est reflexive.

ⓑ symetrique :

1 pt

soit x et y tq $x R y$.

$x R y \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y R x \Leftrightarrow$ R est symétrique

ⓒ transitive

soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $(x R y) \wedge (y R z)$

1 pt

$\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \Rightarrow |x| = |z| \Rightarrow$ R est transitive

de ⓐ, ⓑ et ⓒ on déduit que R est une équivalence.

1 pt

② * $\dot{1} = \{x \in \mathbb{R}$ tq $1 R x\}$.

1 pt

$\cancel{1 R \{x\}}$ $1 R x \Leftrightarrow |1| = |x| \Leftrightarrow |x| = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \dot{1} = \{1, -1\}$

* $(\dot{-1}) = \dot{1}$ car $-1 \in \dot{1}$

* $\dot{2} = \{x \in \mathbb{R}$ tq $2 R x\}$. $2 R x \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \vee \\ x = -2 \end{cases}$

1 pt

$\Rightarrow \dot{2} = \{2, -2\} \Rightarrow \dot{-2} = \dot{2}$

* $\dot{a} = \{|a|, -|a|\} = \{a, -a\}$ / $a \in \mathbb{R}^*$.

1 pt

EXO3 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{x+1}$

① $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \wedge x+1 \neq 0 \}$

$\Rightarrow D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. 2pt

② • $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{x+1}$ 2pt

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1 + 1 = 2$ —— (1)

• $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x)}{x} + \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1}$

$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(-1)}{-1} = \ell$. —— (*)

$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = ?$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ 1pt

(**)

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ 1pt

de (*) et (**) on déduit que :

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$. (2)

③ : ~~$x_0 = 0 \Rightarrow$ d'après (1) on déduit que f est~~

2 on remarque que f n'est pas définie aux pts $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$

on remarque que f n'est pas continue aux pts $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.

$\Rightarrow$ f n'est pas continue aux pts $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.

④ • d'après (1) on remarque que $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

1 $\Rightarrow$ on peut prolongé f au pt $x_0 = 0$

(*) d'après (2) on remarque que $\lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty$

donc on peut pas faire le prolongement de

1 f aux pt $x_1 = -1$.

EX04 : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$

① $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / \ 2-x \neq 0 \text{ et } (1+x)(2-x) \geq 0 \}$.

• $2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$. —— ①

•

x		-1		2	
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(1+x)(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

—— ②

de ① et ② $\Rightarrow D_f = [-1, 2[$ 2

② $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$. 2

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 0$ 2

③ ⓐ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = g(-1)$?

$g(-1) = f(-1) = 0$. 1

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = 0$ 1

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} (\sin(x+1)) = \sin(0) = 0$

$\Rightarrow g$ est continue au pts $x_0 = -1$. 1

④ g est continue sur $]-\infty ; 2[$. 1

Exo5 :

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x+1).$$

① $D_f = ?$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x+1 > 0 \}.$

1 pt

$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\Rightarrow D_f =]-1, +\infty[.$

② f est bijective $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective} \end{cases}$

ⓐ f est injective ?

soit $x_1, x_2 \in D_f$ tq $f(x_1) = f(x_2)$

2 pts

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(x_1+1) = \ln(x_2+1) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow f$ est injective —— (*)

ⓑ f est surjectif :

soit $y \in \mathbb{R} / y = f(x) \Rightarrow y = \ln(x+1)$

2 pts

$\Rightarrow e^y = x+1$

$\Rightarrow x = e^y - 1$

on remarque que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x$ tq $y = f(x)$.

$\Rightarrow f$ est surjectivee —— (**)

de (*) et (**) $\Rightarrow$ f est bijective.

1 pt

③ d'après la demonstration 2.b on a $x = e^y - 1$

$\Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow D_f$
$x \longmapsto y = e^x - 1$

2 pts

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{0}{0}$

$\stackrel{R.H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{+\sin(x)}{2x}$

$\stackrel{RH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{+\cos(x)}{2} = +\dfrac{1}{2}.$

2 pts

EXO6 :

$x, y \in \mathbb{R} : x R y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tq $x - y = k$.

① R est une relation d'ordre $\Leftrightarrow$ R est reflexive. R est Anti-symétrique. R est transitive

ⓐ on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x - x = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ R est reflexive. 2

ⓑ soit x et $y \in \mathbb{R}$ / $x - y = k_1$ / $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

$y - x = k_2$

$x - y = k_1$ — (1)

$y - x = k_2$ — (2)

$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow 0 = k_1 + k_2$. 2

k_1 et $k_2 \in \mathbb{N}$ alors on déduit que $k_1 = k_2 = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow$ R Anti-symétrique.

2

ⓒ soit x, y, z tq $x R y$
$y R z$

$\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = k_1 \quad (1) \\ y - z = k_2 \quad (2) \end{cases} / k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow x - z = k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$

car l'addition est une loi interne dans $\mathbb{N}$

$\Rightarrow x R z$

$\Rightarrow$ R est transitive. 1

de ⓐ, ⓑ et ⓒ $\Rightarrow$ R est une relation d'ordre.

② on a 2 et 2,5 $\in \mathbb{R}$ mais $2 - 2{,}5 \notin \mathbb{N}$ et $2{,}5 - 2 \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ R est un ordre partielle.

1

Exo6 (suite).

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} \stackrel{R.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

2pts