جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر1
2022/2023

2023/01/18

الامتحان النهائي

التمرين 01: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.

2) أوجد أصناف تكافؤ عنصر x $(x \in \mathbb{R})$ ثم استنتج $\overline{(0{,}5)}$، $\dot{2}$.

التمرين 02: نزود المجموعة $I =]1, +\infty[$ بقانون التركيب $\star$ المعرف بـ:

$$\forall\ a, b\ \in I:\ \ a \star b = \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1) + 1}$$

1) بين أن $\star$ قانون تركيب داخلي.

2) ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}_+^* \to I$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1 + x}$$

أ) بين أن f تماثل (أي تشاكل تقابلي) من الزمرة $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I, \star)$.

ب) استنتج أن $(I, \star)$ زمرة، استنتج العنصر الحيادي والعنصر النظير.

3) بين أن المجموعة $E = \left\{\sqrt{1 + 2^m}\ /m \in \mathbb{Z}\right\}$ عبارة عن زمرة جزئية من $(I, \star)$.

التمرين 03: لتكن $(G, \star)$ و$(G', \top)$ زمرتان و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري، أثبت أن:

1) $f(e) = e'$ (حيث e هو العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $\star$ وe' هو العنصر الحيادي في G' بالنسبة لـ $\top$)

2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

3) إذا كان H زمرة جزئية من G فإن $f(H)$ زمرة جزئية من G'

4) f غامر $\Leftrightarrow$ $f(G) = G'$

بالتوفيق