جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات
2023/02/02

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر1
2023/2022

الامتحان الاستدراكي

التمرين 01: نعرف على $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ كما يلي:

$$\forall (p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \quad (p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$$

1) أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
2) عين صنف تكافؤ عنصر (p,q) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
3) ماذا يمكن أن نقول عن مجموعة حاصل القسمة $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_{\mathcal{R}}$.

التمرين 02: ليكن $E =]-1,1[$ ، نعرف على E العملية $*$ كما يلي:

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

1) بين أن $*$ عملية داخلية.
2) بين أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.
3) ليكن x عددا حقيقيًا ثابتًا موجبًا تمامًا. نشكل المجموعة:

$$H_x = \left\{ \frac{x^n-1}{x^n+1} \quad / n \in \mathbb{Z} \right\}$$

- بين أن H_x زمرة جزئية من $(E,*)$.

4) بين أن التطبيق $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (E, \star)$ المعرف بـ $f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$ تشاكلا زمريا.

التمرين 03: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على E. أثبت الخصائص التالية:

1- $\forall x \in E : x \in \dot{x}$
2- $\forall x,y \in E : \dot{x} = \dot{y} \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$
3- $\forall x,y \in E , \dot{x} \neq \dot{y} \Rightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$
4- $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$

بالتوفيق