# الفضاءات الشعاعية

**تعريف:** ليكن $(\mathbb{K},+,\cdot)$ حقل تبديلي
و $E$ مجموعة، نعرف على $E$ العملية
كما يلي: $\cdot : \mathbb{K}\times E \longrightarrow E$

$$(\lambda,x) \longmapsto \lambda\cdot x$$

تسمى عملية خارجية على $E$ ذات مجال $\mathbb{K}$

لتكن الثلاثية $(E,+,\cdot)$ حيث $+$ عملية داخلية و $\cdot$ عملية خارجية ذات مجال $\mathbb{K}$.

نقول أن $(E,+,\cdot)$ ف ش على $\mathbb{K}$ إذا:

1) $(E,+)$ زمرة تبديلية

2) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2:$

a) $(\alpha \overset{\mathbb{K}}{+} \beta)\overset{E}{\cdot} x = \alpha\overset{E}{\cdot}x \overset{E}{+} \beta\overset{E}{\cdot}x$

b) $\alpha\overset{E}{\cdot}(x\overset{E}{+}y) = \alpha\overset{E}{\cdot}x \overset{E}{+} \alpha\overset{E}{\cdot}y$

c) $\alpha\overset{E}{\cdot}(\beta\overset{E}{\cdot}x) = (\alpha\overset{\mathbb{K}}{\cdot}\beta)\overset{E}{\cdot}x$

d) $1_{\mathbb{K}}\overset{E}{\cdot}x = x$

**أمثلة:**

1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ف ش على نفسه

2) $\mathbb{K}$ حقل، $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ ف ش على $\mathbb{K}$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$$

$\lambda\in\mathbb{K},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n:$

$$\lambda\cdot x=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$$

3) $C([a,b],\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المستمرة على المجال $[a,b]$

$f,g\in C([a,b])$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

ف ش على $\mathbb{R}$

عناصر $E$ تسمى أشعة، عناصر $\mathbb{K}$ تسمى سلميات.

**خواص:**

1) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda\cdot 0_E = 0_E$

2) $\forall x\in E,\ 0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$

3) $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E:\ \lambda(-x) = -(\lambda x) = (-\lambda)\cdot x$

4) $\lambda\cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \vee x = 0_E$

5) إذا كان $(\mathbb{K},+,\cdot)$ حقل تبديلي فإنه ف ش على $\mathbb{K}$

**البرهان:**

1) $\lambda\cdot 0_E + 0_E = \lambda\cdot 0_E = \lambda\cdot(0_E+0_E)$

$= \lambda\cdot 0_E + \lambda 0_E$

إذن $\lambda\cdot 0_E = 0_E$

2) $0_{\mathbb{K}}\cdot x + 0_E = 0_{\mathbb{K}}\cdot x = (0_{\mathbb{K}}+0_{\mathbb{K}})\cdot x$

$= 0_{\mathbb{K}}\cdot x + 0_{\mathbb{K}}\cdot x$

إذن $0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$

3) $\lambda\cdot(-x) + \lambda x = \lambda\cdot(-x+x)$

$= \lambda\cdot 0_E = 0_E$

من جهة أخرى $0_E = -\lambda\cdot x + \lambda x$

إذن $\lambda\cdot(-x) + \lambda x = -\lambda\cdot x + \lambda x$

ومنه $\lambda\cdot(-x) = -\lambda x$

$(-\lambda)x + \lambda\cdot x = (-\lambda+\lambda)\cdot x$

$= 0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$

و $0_E = -(\lambda\cdot x) + \lambda\cdot x$

إذن $(-\lambda)\cdot x + \lambda x = -(\lambda\cdot x) + \lambda\cdot x$

أي $(-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x)$

4) نفرض أن $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ ونبين أن $x = 0_E$

$\lambda\cdot x = 0_E,\ \lambda \neq 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow \exists\,\lambda^{-1}$

$\lambda^{-1}(\lambda\cdot x) = 0_E \Rightarrow (\lambda^{-1}\cdot\lambda)\cdot x = 0_E$

$\Rightarrow 1_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$

5) لنكن $(K,+,.)$ حقل تبديلي

تبين أن $K$ ف ش ع $K$

$(K,+)$ زمرة تبديلية لأن $K$ حقل

نبين الخواص الاربعة :

a) $(\alpha+\beta).\gamma = \gamma.(\alpha+\beta)$ ( $K$ تبديلي )

$= \gamma.\alpha + \gamma.\beta = \alpha\gamma + \beta.\gamma$ ( توزيع + الحقل )

b) $\alpha.(\beta+\gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$ ( توزيع . ع + )

c) $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$ ( تجميعية )

d) $1_K.\gamma = 1_K$ .

<u>تعريف</u>: (الفضاء الشعاعي الجزئي)

ليكن $(E,+,.)$ ف ش على حقل $K$ و $\emptyset \neq F \subset E$

نقول أن $F$ ف ش ج اذا كان $(F,+,.)$ ف ش ع $K$ <u>وهذا يكافئ</u>

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ x,y \in F \Rightarrow x+y \in F \\ \lambda \in K, x \in F \Rightarrow \lambda x \in F \end{cases}$$

<u>نظرية</u>: $(E,+,.)$ ف ش على $K$ ، $\emptyset \neq F \subset E$

$F$ ف ش ج من $E$ $\Leftrightarrow$ $\forall(\alpha,\beta)\in K^2, \forall(x,y)\in F^2$ ؟

$\alpha x + \beta.y \in F$

<u>البرهان</u>:

$\Leftarrow$ اذا كان $F$ ف ش ج من $E$ فإن العلاقة محققة

$\Rightarrow$ نبرهن أن $(F,+)$ زمرة تبديلية

أي نبين أن $(F,+)$ زمرة جزئية؟

$x,y \in F \Rightarrow x-y \in F$ ?

نأخذ $\alpha = 1_K$ و $\beta = -1_K$

اذن $1_K.x + (-1_K).y \in F$

$1_K.x + (-1_K).y = x + (-(1_K y))$

$= x - y \in F$

• عملية خارجية في $F$ أي

$\lambda \in K, x \in F \Rightarrow \lambda.x \in F$?

نأخذ $\alpha = \lambda, \beta = 0_K$

$\lambda.x + 0_K.y = \lambda.x \in F$

خواص العملية الخارجية تبقى محققة لأن $F$ جزء من $E$ .

<u>ملاحظات</u>:

1) $E$ و $\{0_E\}$ ف ش ج من $E$

2) اذا كان $0_E \notin F$ فإن $F$ ليس ف ش ج

<u>نظرية</u>: ليكن $(E,+,.)$ ف ش ع الحقل $K$ ولتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ عائلة كيفية من ف ش ج من $E$ اذن $\bigcap_{i\in I} F_i$ ف ش ج من $E$ .

<u>البرهان</u>:

$\forall(x,y)\in\left[\bigcap_{i\in I} F_i\right]^2, \forall(\alpha,\beta)\in K^2$ لدينا

$(x,y)\in\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^2 \Rightarrow (x,y)\in(F_i)^2, \forall i\in I$

$\Rightarrow (\alpha x+\beta y)\in F_i, \forall i \in I$

$\Rightarrow (\alpha x+\beta y)\in \bigcap_{i\in I} F_i$

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i$ ف ش ج من $E$

<u>العبارة الخطية</u> (المزج الخطي)

ليكن $(E,+,.)$ ف ش ع حقل $K$

1) لتكن $x,y,z \in E$ و $\alpha,\beta,\gamma \in K$

$\alpha x \in E, \alpha x+\beta y \in E, \alpha x+\beta y+\gamma z \in E$

2) بصفة أعم لتكن $\{x_i\}_{i=1,p} \subset E$ ، $\{\lambda_i\}_{i\in 1,p} \subset K$

العنصر $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in E$ يسمى عبارة خطية أو تركيبة خطية أو مزج خطي للأشعة $\{x_i\}_{i=1,p}$ والثوابت $\{\lambda_i\}_{i=1,p}$

③ بصفة أعم إذا كانت $\{x_i\}_{i\in I} \subset E$ ، $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{K}$ بحيث تكون مجموعة الأدلة $i \in I$ حيث $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ منتهية (جميع السلميات $\lambda_i$ معدومة ما عدا عدد منته) فإن $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in E$ وهو أيضا عبارة خطية ، في عبارة خطية السلميات تدعى معاملات

## الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بمجموعة

**تعريف :** ليكن $(E,+,\cdot)$ ف ش ع $\mathbb{K}$ ، $\phi \neq A \subset E$ ، الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ $A$ هو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية التي تحوي $A$ ونرمز له بالرمز $[A]$ وهو أيضا أصغر ف ش ج يحوي $A$

**نظرية :** ليكن $E$ ف ش ع $\mathbb{K}$ ولتكن العائلة $E \supset \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$

1) المجموعة

$$F=\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \;/\; \begin{matrix}\lambda_i \in \mathbb{K}\\ \forall i=\overline{1,n}\end{matrix}\right\}$$

هي ف ش ج من $E$

2) $[\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}] = F$

**البرهان :**

1) نلاحظ أن $F$ غير خال لأن

$$0_E = 0_{\mathbb{K}} e_1 + 0_{\mathbb{K}} e_2 + \dots + 0_{\mathbb{K}} e_n \in F$$

ليكن $x,y \in F$ ؛ $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ ونبين أن $\alpha x+\beta y \in F$ ؟

$$x \in F \Rightarrow \exists \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

$$y \in F \Rightarrow \exists \{\gamma_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathbb{K} : y = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$$

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)+\beta\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} (\beta\gamma_i) e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\underbrace{\alpha\lambda_i+\beta\gamma_i}_{\theta_i}\big) e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} \theta_i e_i \in F\end{aligned}$$

إذن $F$ ف ش ج من $E$ .

2) لدينا : $e_1 = 1_{\mathbb{K}} e_1 + 0_{\mathbb{K}} e_2 + \dots + 0_{\mathbb{K}} e_n \in F$

$e_2 = 0_{\mathbb{K}} e_1 + 1_{\mathbb{K}} e_2 + \dots + 0_{\mathbb{K}} e_n \in F$

$\vdots$

$e_n = 0_{\mathbb{K}} e_1 + \dots + 1_{\mathbb{K}} e_n \in F$

إذن $\{e_1,\dots,e_n\} \subset F$

ومنه $[\{e_1,\dots,e_n\}] \subset F$

حسب تعريف ف ش ج مولد بمجموعة

الآن نبين أن $F \subset [\{e_1,\dots,e_n\}]$

$$x \in F \Rightarrow \exists \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

نعلم أن $\{e_1,\dots,e_n\} \subset [\{e_1,\dots,e_n\}]$

إذن $\lambda_i e_i \in [\{e_1,\dots,e_n\}]$

إذن (لأنه ف ش ج)

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in [\{e_1,\dots,e_n\}]$$

إذن $F \subset [\{e_1,\dots,e_n\}]$

## الفضاء الجداء:

$\{E_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ف ش ع $\mathbb{K}$

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) \;/\; x_i \in E_i ,\ i=\overline{1,n}\}$$

نعرف على $\prod_{i=1}^{n} E_i$ القانونين $+$ و . بالشكل التالي

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}$$

$\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, +, \cdot\right)$ ف ش ع $\mathbb{K}$

## الفضاء الشعاعي حاصل القسمة : (Quotient)

ليكن $E$ ف ش ع $\mathbb{K}$، $F$ ف ش ج من $E$

نعرف على $E$ العلاقة $R_F$ كما يلي

$$\forall x,y\in E \;/\; x\,R_F\,y \Leftrightarrow x-y\in F$$

1) $R_F$ علاقة تكافؤ على $E$

2) $E/R_F$ هي مجموعة حاصل القسمة

نزود $E/R_F$ بالعمليتين :

$$\forall \bar{x},\bar{y}\in E/R_F \;;\; \forall \lambda\in\mathbb{K} :$$

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$$

$$\lambda.\bar{x}=\overline{\lambda x}$$

بدل $E/R_F$ تكتب $E/F$

$(E/F,+,.)$ ف ش ع $\mathbb{K}$

التحقق : 1) علاقة تكافؤ واضحة

2) $\bar{x}+\bar{0}_E=\overline{x+0_E}=\bar{x}$

$\bar{0}_E$ هو العنصر الحيادي

$\bar{x}+\overline{(-x)}=\overline{x+(-x)}=\bar{0}_E$

$-\bar{x}$ هو نظير $\bar{x}$

تبديلية و تجميعية واضحة

- الشروط الأربعة :

$$(\alpha+\beta).\bar{x}=\overline{(\alpha+\beta).x}=\overline{\alpha x+\beta x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$$

$$\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha(\overline{x+y})=\overline{\alpha(x+y)}=\overline{\alpha x+\beta y}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}$$

$$\alpha(\beta\bar{x})=\alpha(\overline{\beta x})=\overline{\alpha(\beta x)}=\overline{(\alpha.\beta).x}=(\alpha.\beta)\bar{x}$$

$$1_{\mathbb{K}}\bar{x}=\overline{1_{\mathbb{K}}x}=\bar{x}$$

## الفضاء المجموع :

ليكن $(E,+,.)$ ف ش ع $\mathbb{K}$

$\{E_i\}_{i=1..n}$ ف ش ج من $E$

1) المجموع $E_1+E_2+\dots+E_n=\sum_{i=1}^{n}E_i=\{x_1+x_2+\dots+x_n \,/\, x_i\in E_i\}$

هو فضاء شعاعي جزئي من $E$ نسمي الفضاء المجموع

a) $\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]=E_1+\dots+E_n$

البرهان :

1) $x,y\in\sum_{i=1}^{n}E_i \Rightarrow \begin{cases} x=x_1+\dots+x_n \\ y=y_1+\dots+y_n\end{cases}$ $\; x_i\in E_i,\; y_i\in E_i$

$$\alpha x+\beta y=\alpha(x_1+\dots+x_n)+\beta(y_1+\dots+y_n)=\sum(\alpha x_i+\beta y_i)$$

$\alpha x_i+\beta y_i\in E_i\;\forall i=\overline{1,n}$ لأن $E_i$ ~~$\alpha n$~~ ف ش ج

اذن $\alpha x+\beta y\in\sum_{i=1}^{n}E_i$

2) $x\in\bigcup_{i=1}^{n}E_i \Rightarrow \exists i_0 : x\in E_{i_0}$

$$\Rightarrow x=0_E+0_E+\dots+x+\dots+0_E$$

$$\Rightarrow x\in\sum_{i=1}^{n}E_i .$$

اذن $\bigcup E_i\subset\sum_{i=1}^{n}E_i$ ومنه $\left[\bigcup E_i\right]\subset\sum_{i=1}^{n}E_i$

الآن العكس $x\in\sum E_i \Rightarrow x=x_1+x_2+\dots+x_n$

$$\Rightarrow x_i\in E_i\subset\bigcup E_i\subset\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]$$

$$\Rightarrow \sum x_i\in\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]$$

$$\Rightarrow x\in\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]$$

تعريف $\{E_i\}_{i=1..n}$ ف ش ج لـ ف ش $E$

$$F=E_1+E_2+\dots+E_n$$

نقول أن $F$ جمع مباشر لـ $E_i$ و نكتب

$$F=E_1\oplus E_2\oplus\dots\oplus E_n$$

اذا كان كل عنصر $x$ من $F$ يكتب بشكل وحيد بواسطة عناصر $E_i$ أي

$$\forall x\in F : \exists!\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in\prod_{i=1}^{n}E_i : x=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+\dots+x_n \\ x=y_1+\dots+y_n\end{array}\right\}\Rightarrow x_i=y_i$$

**تعريف:** $E_1$ و $E_2$ ف ش ج من $E$

نقول أن $E_1$ و $E_2$ متتامان اذا كان

$E = E_1 \oplus E_2$

**نظرية:** $E_1$ و $E_2$ ف ش ج لـ $E$

$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E = E_1 + E_2 \wedge E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

**البرهان:**

1) $\Leftarrow$

$x \in E = E_1 + E_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in E_1, \ x_2 \in E_2$

نبين أن هذه الكتابة وحيدة؟

نفرض أن $x$ يمكن كتابته على الشكل

$x = y_1 + y_2$ حيث $y_1 \in E_1$ و $y_2 \in E_2$

ونبين أن $y_1 = x_1$ ، $y_2 = x_2$ ؟

$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2$

$x_1 - y_1 \in E_1, \ y_2 - x_2 \in E_2$

اذن $x_1 - y_1 \in E_1 \cap E_2$ , $y_2 - x_2 \in E_1 \cap E_2$

لكن $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ اذن $x_1 - y_1 = 0_E$

$y_2 - x_2 = 0_E$

ومنه $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$

اذن الكتابة وحيدة

2) $\Rightarrow$

$E = E_1 + E_2$ ? و $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ ?

لدينا $E_1 + E_2 \subset E$

و $x \in E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \in E_1 + E_2$

اذن $E \subset E_1 + E_2$

ومنه $E = E_1 + E_2$

$x \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow x \in E_1 \wedge x \in E_2$

$x \in E_1 \cap E_2 \subset E \Rightarrow x \in E = E_1 \oplus E_2$

$x = x + 0_E = 0_E + x$

وبما أن الكتابة وحيدة اذن $x = 0_E$

ومنه $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

## العائلة الطليقة (المستقلة خطيا)

**تعريف:** ليكن $(E,+,\cdot)$ ف ش ع على حقل $\mathbb{K}$

ولتكن $\{x_i\}_{i\in I}$ عائلة من الأشعة من $E$

~~المعاملات~~ $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ " " السلميات من $\mathbb{K}$

المعادلة $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$

تسمى علاقة خطية بين $\{x_i\}$

إذا كانت جميع المعاملات $\lambda_i = 0$

تسمى العلاقة علاقة خطية بديهية

اذا ~~كان~~ وجد $\lambda_i \neq 0$ بحيث

$\sum \lambda_i x_i = 0$ تسمى علاقة خطية غير بديهية

مثلا:

1) العلاقة $\lambda x = 0$ مع $\lambda \neq 0$ تعطي

لنا $x = 0$

$\lambda x = 0$ مع $x \neq 0$ تعطي لنا $\lambda = 0$

إذن الشعاع غير المعدوم لا يحقق علاقة خطية غير بديهية

2) لو نأخذ العلاقة $\lambda x + \mu y = 0$

مع $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ تعطي لنا اما

$y = -\frac{\lambda}{\mu} x$ $(\mu \neq 0)$ أو $x = -\frac{\mu}{\lambda} y$ $(\lambda \neq 0)$

اذا كان $\mu = 0$ أو $\lambda = 0$ اذن واحد

من الأشعة على الأقل معدوم $(x = 0 \vee y = 0)$

إذا كان $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ فإن كل شعاع

هو مضاعف للآخر

**تعريف:**

نقول أن العائلة $\{x_i\}_{i\in I}$ أنها طليقة

(مستقلة خطيا) اذا لم توجد أي علاقة

غير بديهية بين عناصرها

أي:

$\forall \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{K} : \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in I$

ونقول أن $\{x_i\}_{i\in I}$ مقيدة (مرتبطة خطيا) اذا كانت ليست مستقلة خطيا أي

$\exists i \in I : \lambda_i \neq 0 \wedge \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$

ملاحظة(1): ان تعريف الإستقلال الخطي مرتبط بالحقل أي يمكن أن تكون اشعة مستقلة خطيا فإذا غيرنا الحقل تصبح مرتبطة خطيا مثلا: اذا اعتبرنا $\mathbb{R}$ ف ش ع $\mathbb{R}$ فان الشعاعين $1, \sqrt{2}$ مرتبطين خطيا اما إذا اعتبرنا $\mathbb{R}$ ف ش ع $\mathbb{Q}$ فان $1, \sqrt{2}$ مستقلين خطيا

2) أي عائلة تحوي $0_E$ فهي غير مستقلة خطيا

~~ملاحظة~~ ملاحظات

1) في أي فضاء شعاعي المجموعات الاحادية $\{x\}$ حيث $x \neq 0_E$ مستقلة خطيا.

$\lambda x = 0_E \wedge x \neq 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$

2) الشعاعان $x, y$ مستقلين خطيا إذا وفقط إذا لم يكن واحد من الاشعة مضاعف للآخر

3) كل عائلة جزئية من عائلة مستقلة خطيا، مستقلة خطيا

4) كل عائلة تحوي عائلة مرتبطة خطيا مرتبطة خطيا

5) $\{0_E\}$ عائلة مرتبطة خطيا

نظرية: لتكن $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ عائلة منتهية لدينا التكافؤ التالي

1) $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ مرتبطة خطيا

2) احد عناصر $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ هو ~~...~~ مزج خطي لبقية العناصر

البرهان:

1) $\Leftarrow$ 2)

$\{x_i\}$ مرتبطة خطيا اذن $\exists \lambda_{i_0} \neq 0$ بحيث $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

$$\sum \lambda_i x_i = \lambda_{i_0} x_{i_0} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

$$\lambda_{i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i x_i$$

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \left(-\lambda_{i_0}^{-1} \lambda_i\right) x_i$$

إذن $x_{i_0}$ هو عبارة خطية لبقية العناصر

2) $\Leftarrow$ 1)

نفرض أن $x_{i_0}$ هو عبارة خطية لبقية العناصر أي $x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i x_i$

اذن

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i x_i - x_{i_0} = 0$$

$\lambda_{i_0} = -1$

وبالتالي $\exists \lambda_{i_0} \neq 0 :$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

اذن $\{x_i\}$ مرتبطة خطيا

**مثال:** ليكن الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$

1) بين أن الشعاعان $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ مستقلين خطيا

2) هل الأشعة $u=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ مستقلة خطيا

**الحل:** - -

## الأساس

**تعريف العائلة المولدة:**

ليكن $E$ ف ش على $\mathbb{K}$ و $\{a_i\}_{i\in I}\subset E$ عائلة من $E$

نقول أن $\{a_i\}_{i\in I}$ مولدة لـ $E$ إذا كان كل عنصر $x\in E$ يكتب على شكل عبارة خطية لـ $\{a_i\}_{i\in I}$

$$\forall x\in E, \exists \{\lambda_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K} : x=\sum_{i\in I}\lambda_i a_i$$

أي $[\{a_i\}_{i\in I}]=E$

**مثال:**

نعتبر $\mathbb{R}^2$ ف ش على $\mathbb{R}$

العائلة $\{(1,0),(0,1)\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^2$

العائلة $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ مولدة أيضا لـ $\mathbb{R}^2$

نلاحظ أن العائلة الثانية تحوي الأولى

**نتيجة:** اذا كانت $A$ مولدة لـ $E$ و $A\subset B$ فإن $B$ مولدة أيضا لـ $E$

**البرهان** (تمرين)

**تعريف الأساس**

ليكن $E$ ف ش على $\mathbb{K}$ و $B=\{a_i\}_{i\in I}\subset E$

نقول أن $B$ أساس لـ $E$ إذا كانت $B$ مولدة و مستقلة خطيا

**تعريف:**

ليكن $E$ ف ش على $\mathbb{K}$ و $B=\{a_i\}_{i\in I}\subset E$

1) نقول أن $B$ مستقلة خطيا وأعظمية اذا كانت مستقلة خطيا و:

$\forall A\subset E / B\subsetneq A \Rightarrow$ $A$ مرتبطة خطيا

2) نقول أن $B$ مولدة وأصغرية اذا كانت مولدة لـ $E$ $([B]=E)$ و:

$\forall A\subset E / A\subsetneq B \Rightarrow [A]\subsetneq E$

$A$ ليست مولدة لـ $E$

**~~ملاحظة~~ أمثلة:**

1) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}$ على نفسه أي شعاع غير معدوم من $\mathbb{K}$ يعتبر أساس له

2) في $\mathbb{R}^2$ ف ش ج على $\mathbb{R}$ $\{(1,0),(0,1)\}$ أساس

بينما $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ ليس أساس لأنها ليست مستقلة خطيا

3) $\mathbb{C}$ ف ش على $\mathbb{R}$ $(1,i)$ أساس لـ $\mathbb{C}$

4) $\mathbb{C}$ ف ش على $\mathbb{C}$ $1$ أساس لـ $\mathbb{C}$

5) في $\mathbb{K}^n$ ف ش على $\mathbb{K}$

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

**نظرية**: ليكن E ف ش على IK
$B=\{a_i\}_{i\in I}$ اساس لـ E
اذن كل عنصر من E يكتب بشكل
وحيد كعبارة خطية لـ $\{a_i\}_{i\in I}$

**البرهان**: ليكن $x\in E$
نفرض أنه توجد كتابتان أي
توجد عائلتان $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ و $\{\lambda'_i\}_{i\in I}$
بحيث:
$$x=\sum \lambda_i e_i \quad , \quad x=\sum \lambda'_i e_i$$
اذن
$$\sum \lambda_i e_i-\sum \lambda'_i e_i=0$$
$$\sum_{i\in I}(\lambda_i-\lambda'_i)e_i=0$$
وعائلة $\{e_i\}$ أساس اذن فهي
مستقلة خطيا وبالتالي
$$\lambda_i-\lambda'_i=0 \Rightarrow \lambda_i=\lambda'_i$$
اذن الكتابة وحيدة

**نظرية**: ليكن E ف ش على IK
و $\emptyset\neq B\subset E$، القضايا
الآتية متكافئة
1) B اساس لـ E
2) B مستقلة خطيا وأعظمية
3) B مولدة وأصغرية

**البرهان**: (نترك كل الأعمال الموجهة)

1) ⇐ 2)؟
بما أن B أساس فإنها مستقلة
بقي أن نبرهن أنها أعظمية
حسب تعريف المجموعة الأعظمية
يجب أن نبين أن أي مجموعة A حيث $B\subsetneq A$
هي مرتبطة خطيا

لتكن A حيث $B\subsetneq A$
نبين أن A مرتبطة خطيا
$$B\subsetneq A \Rightarrow \exists a\in A \wedge a\notin B$$
$$a\in A\subset E=[B] \Rightarrow a\in[B]$$
$$\Rightarrow a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i \ / \ b_i\in B$$
$$\Rightarrow a-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i=0_E$$
$\Rightarrow \{a,b_1,\dots,b_n\}$ مرتبطة خطيا
$$\{a,b_1,\dots,b_n\}\subset B\cup\{a\}\subset A$$
اذن A مرتبطة خطيا لأنها تحوي
عائلة مرتبطة خطيا
ومنه B أعظمية

2) ⇐ 3)؟
نريد أن نبين أن B مولدة وأصغرية
علما أنها مستقلة وأعظمية
~~اذن فهي مستقلة ويبقى أن نبين~~
~~أنها مولدة لـ E~~

B مولدة؟
نفرض العكس أي أنها غير مولدة لـ E
أي $\exists x\in E \ / \ x\notin[B]$
أي أن $x$ لا يكتب كعبارة خطية
لـ عناصر B اذن العائلة $B\cup\{x\}$
مستقلة خطيا، وهذا يناقض
أن B أعظمية
اذن $[B]=E$

أصغرية؟
حسب تعريف أصغرية يجب أن نبين
أنه من اجل اي مجموعة A حيث $A\subsetneq B$
فإنها غير مولدة لـ E $([A]\neq E)$

ليكن $A\subset E$ حيث : $A \subsetneq B$

نريد أن نبين أن $[A] \subsetneq E$ ؟

نفرض العكس أي $[A] = E$

لدينا $A \subsetneq B \Rightarrow \exists b \notin B \wedge b\notin A$

$b\in B\subset E=[A]$

اذن b تكتب على شكل عبارة خطية لعناصر A ومنه $A\cup\{b\}$ مرتبطة خطيا ونعلم أن $A\cup\{b\}\subset B$

اذن B مرتبطة خطيا

وهذا تناقض

③ ⇐ ① ؟

نريد ان نبين ان B اساس أي مولدة ومستقلة خطيا :

نعلم أنها مولدة وأعظمية نبرهن أنها مستقلة خطيا

B مستقلة ؟

نفرض العكس أي انها مرتبطة خطيا هذا يعني انه يوجد عنصر من b يكتب على شكل عبارة خطية للبقية

$\exists b\in B : b\in [B/\{b\}]$

اذن $\{b\}\subset [B\setminus\{b\}]$

ولدينا $B/\{b\}\subset [B\setminus\{b\}]$

اذن $\{b\}\cup B\setminus\{b\} = B\subset [B\setminus\{b\}]$

و $[B] = E$

اذن $E\subset [B-\{b\}]$

أي أن $E = [B\setminus\{b\}]$

وهذا تناقض كون B اعظمية

## بعد الفضاء الشعاعي :

**تعريف :** E ف ش ع $K$

نقول أن E ذو بعد منته إذا وجد فيه مجموعة مولدة منتهية

أي $\exists G\subset E : [G]=E \wedge |G|<\infty$

**نظرية :** ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته، لتكن G مولدة لـ E، و L عائلة مستقلة خطيا من E

إذن يوجد B أساس لـ E حيث $L\subset B$

**البرهان :** لتكن F المجموعة المكونة من العائلات المستقلة خطيا التي تحوي L والمحتواة في G

F منتهية لأن G منتهية

ليكن B أكبر عائلة في F

اذ B مستقلة خطيا وأعظمية

اذن B أساس وهو المطلوب

**ملاحظات :**

1) كل فضاء شعاعي يقبل أساس (حتى ولو كان بعده غير منته)

2) يمكن إكمال أي عائلة طليقة لعناصر من عائلة مولدة للحصول على اساس للفضاء

3) G مولدة لـ E و L مستقلة خطيا فإن $\text{card } L \le \text{card } G$

**نظرية البعد:** إذا كان $E$ ف ش ع $\mathbb{K}$ ذو بعد منته فإن كل أسس $E$ لها نفس عدد العناصر، هذا العدد يسمى بعد $E$ ونكتب $\dim E$

**البرهان:** ليكن $B_1$ و $B_2$ أساسين لـ $E$

$B_1$ مولدة و $B_2$ مستقلة $\Leftarrow$ $\operatorname{card} B_2 \le \operatorname{card} B_1$

$B_2$ مولدة و $B_1$ مستقلة $\Leftarrow$ $\operatorname{card} B_1 \le \operatorname{card} B_2$

ومنه $\operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2$

**نتيجة 1:** اذا كان $E$ ف ش بعده $n$ فإن كل عائلة مستقلة تحوي على الأكثر على $n$ عنصر وكل عائلة مولدة تحوي على الأقل $n$ عنصر

**نتيجة 2:** ليكن $E$ ف ش $\dim E = n$، $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ القضايا الآتية متكافئة

1) $B$ مستقلة 2) $B$ مولدة 3) $B$ أساس

**نتيجة 3:** إذا كان $E$ ف ش بعده $n$ فإن أي فضاء ش ج $F$ من $E$ بعده اقل أو يساوي $n$ $\dim F \le \dim E$

• إذا كان $F$ ف ش ج بحيث $\dim F = \dim E$ فإن $F = E$

**البرهان:**

$\dim E = n \Rightarrow \exists B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس

$F \subset E$ و $E$ ذو بعد منته اذن $F$ أيضا ذو بعد منته إذن توجد عائلة $L \subset E$ مستقلة خطيا بحيث $\operatorname{card} L \le \dim E$

نفرض أن $L$ أساس لـ $F$ إذن $\dim F = \operatorname{card} L$

ومنه $\dim F \le \dim E$

• ليكن $B_F$ أساس لـ $F$

اذن $B_F$ مستقلة خطيا في $E$

و لدينا $\operatorname{card} B_F = \dim F = n = \dim E$

اذن $B_F$ مستقلة خطيا وأعظمية

أي $B_F$ اساس لـ $E$ اذن

$[B_F] = E$ و لدينا ايضا $[B_F] = F$

إذن $E = F$

**ملاحظة:** الفضاء الشعاعي الجزئي $\{0_E\}$ بعده $0$

**نظرية:** $E$ ف ش ع $\mathbb{K}$، $F$ ف ش ج من $E$ اذا $\dim E < \infty$ اذن:

$\exists G$ ف ش ج $: E = F \oplus G \wedge \dim E = \dim F + \dim G$

**البرهان:** نفرض أن $\dim E = n$ ،

$\dim F = p \le n$

$B_F = \{e_1, \dots, e_p\}$ أساس لـ $F$

$B_F$ مستقلة خطيا في $E$ اذن يمكن اكمالها للحصول على اساس لـ $E$

$B_E = B_F \cup \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$

نضع $B_G = \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$

وليكن $G$ هو الفضاء المولد بـ $B_G$

$[B_G] = G$ ، $\dim G = n - p$

$E = F \oplus G$ ?

$\forall x \in E : x = x_F + x_G \,/\, x_F \in F,\ x_G \in G$

نبين أن الكتابة وحيدة ؟

$x_F \in F \Rightarrow x_F = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_p e_p$

$x_G \in G \Rightarrow x_G = \alpha_{p+1} e_{p+1} + \dots + \alpha_n e_n$

هذه الكتابة وحيدة لأن $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ $E$

$$\dim E = p + (n-p) = \dim F + \dim G$$

<u>نظرية:</u> $E$ ف ش على $\mathbb{K}$ حيث $\dim E < \infty$

$E_1$ و $E_2$ ف ش ج من $E$ اذن

$$\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

<u>البرهان:</u>

نضع $F = E_1 \cap E_2 \subset E_2$

حسب النظرية السابقة يوجد $G$ ف ش ج من $E_2$ حيث

$$E_2 = F \oplus G \wedge \dim E_2 = \dim F + \dim G$$

نبين أن $E_1 + E_2 = E_1 \oplus G$ ?

<u>أولا</u> $E_1 + E_2 = E_1 \oplus G$ ?

$E_1 + E_2 \subset E_1 \oplus G$ ?

$x \in E_1 + E_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$

$x_2 \in E_2 \Rightarrow x_2 = x_F + x_G \ / \ x_F \in F,\ x_G \in G$

$x = (x_1 + x_F) + x_G \ / \ x_1 + x_F \in E_1$ لأن $F \subset E_1$

إذن $x \in E_1 + G$

$E_1 \oplus G \subset E_1 + E_2$ ?

لدينا $G \subset E_2$ إذن

$E_1 \oplus G \subset E_1 + E_2$

<u>ثانيا:</u> $E_1 \cap G = \{0_E\}$ ?

$x \in E_1 \cap G \Rightarrow x \in E_1 \wedge x \in G \subset E_2$

$\Rightarrow x \in E_1 \wedge x \in E_2$

$\Rightarrow x \in E_1 \cap E_2 = F \wedge x \in G$

$\Rightarrow x \in F \cap G = \{0_E\}$

(F و G مجموع مباشر)

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \oplus G)$$
$$= \dim E_1 + \dim G$$
$$= \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$$

<u>نتيجة:</u> إذا كان $E_1$ و $E_2$ ف ش ج من $E$ متكاملان $(E = E_1 \oplus E_2)$ فإن

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

<u>نظرية:</u> $E$ و $F$ ف ش على $\mathbb{K}$ حيث: $\dim E < \infty,\ \dim F < \infty$ فإن

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

<u>البرهان:</u> $\dim E = n,\ \dim F = p$

$B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس لـ $E$

$B_F = \{f_1, \dots, f_p\}$ أساس لـ $F$

لتكن العائلة

$$B = \{(e_1, 0_F), (e_2, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), (0_E, f_2), \dots, (0_E, f_p)\}$$

$B \subset E \times F$

$B$ أساس لـ $E \times F$ ؟

$B$ مولدة لـ $E \times F$ ؟

$$(x, y) \in E \times F \Rightarrow x \in E \wedge y \in F$$
$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \wedge y = \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i$$
$$\Rightarrow (x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i (0_E, f_i)$$
$$\Rightarrow (x, y) \in [B]$$

$B$ مستقلة خطيا في $E \times F$ ؟

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i ; 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i (0_E, f_i) = (0_E, 0_F) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i = 0_{\mathbb{K}} \ \forall i \ ?$$

$$(1) \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i ; \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i \right) = (0_E, 0_F)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E \\ \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i = 0_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i = 0_{\mathbb{K}} \ \forall i = \overline{1,n} \\ \beta_i = 0_{\mathbb{K}} \ \forall i = \overline{1,p} \end{cases}$$

لأن $\{e_i\}$ أساس لـ $E$ و $\{f_i\}$ أساس لـ $F$

اذن $\dim E \times F = \text{card } B = n + p$

$= \dim E + \dim F$

<u>نتائج:</u>

1) اذا كانت $E_i$ $i = \overline{1,n}$ ف ش ع $\mathbb{K}$

فان $\dim \left( \prod_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$

2) اذا كان $\mathbb{K}$ حقل تبديلي (نعلم أنه ف ش ع نفسه) فإن $\dim \mathbb{K} = 1$

$$\mathbb{K} = [\{1_{\mathbb{K}}\}]$$

3) $\mathbb{K}$ حقل تبديلي و $n \in \mathbb{N}^*$ فإن

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

$$(\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim \mathbb{R} = 1 \quad )$$