جامعة محمد خيضر بسكرة — السنة الأولى (MI+رياضيات)

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة — مقياس جبر2

قسم الرياضيات — 2023/2022

السلسلة رقم 01 (الفضاءات الشعاعية)

<u>التمرين 01</u>: نزود $\mathbb{R}^*$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\begin{array}{ll} \otimes:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^* & \oplus:\ \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^* \\ (\lambda,\ x)\mapsto \lambda\otimes x = x^{\lambda} & (x\ ,y)\mapsto x\oplus y = xy \end{array}$$

بين أن $(\mathbb{R}^*,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$.

<u>التمرين 02</u>: نعرف على $E=\mathbb{R}^2$ العمليتين:

$$\forall(x,y),(x',y')\in E:\qquad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$\forall\alpha=a+ib\in\mathbb{C},\qquad (a+ib).(x,y)=(ax-by,ay+bx)$$

بين أن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

<u>التمرين 03</u>: في كل حالة من الحالات التالية، هل $(\mathbb{R}^2,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$؟

1) $\alpha.(x,y)=(\alpha x,y)$; $(x,y)+(x',y')=(y+y',x+x')$;

2) $\alpha.(x,y)=(\alpha x,-\alpha y)$; $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$;

3) $\alpha.(x,y)=(\alpha^2 x,\alpha^2 y)$; $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$;

<u>التمرين 04</u>: في كل حالة من الحالات التالية، تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

$$E=\mathbb{R}^2$$

$F_1=\{(x,y)\in E/\ 3x-y=0\}$

$F_2=\{(x,y)\in E/\ e^x e^y=0\}$

$F_3=\{(x,y)\in E/\ xy=0\}$

$$E=\mathbb{R}^3$$

$F_4=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=0\}$

$F_5=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=2\}$

$F_6=\{(x,y,z)\in E/\ z(\ x^2+y^2)=0\}$

$$E=\mathbb{P}_1[X]$$

$F_7=\{P\in E, P'(0)=3\}$

$F_8=\{P\in E, P(2)=P'(2)\}$

$F_9=\{P\in E, P(-1)=P(2)\}$

$$E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$F_{10}=\left\{f\in E/\ \text{زوجية}\ f\right\}$

$F_{11}=\left\{f\in E/\ \text{متزايدة}\ f\right\}$

$F_{12}=\{f\in E/\forall x\in\mathbb{R}: f(1-x)=f(x)\}$

التمرين 05: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، وليكن $U = (1,-3,2)$ ، $V = (2,-1,1)$

1) اكتب الشعاع $X = (1,7,-4)$ كعبارة خطية لـ U و V.

2) هل الشعاع $Y = (2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V؟

3) أوجد m بحيث $Z = (3,1,m) \in [\{U,V\}]$.

التمرين 06:

1) من بين العائلات التالية، ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(3,-1),(1,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(-1,1),(3,-3)\}, \mathcal{F}_3 = \{(3,-1),(1,1),(1,-2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[X]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2, 3X, -1\}, \mathcal{F}_2 = \{X^2+X, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{2X^2-5, 7X, 3X^2+4\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1),(-1,1,0)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,-1),(2,0,3),(3,1,-1)\}$$

2) من بين العائلات التالية، ما هي المستقلة خطيا في E ؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(-1,3),(0,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2),(-1,1),(-1,2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[X]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2+1, X-2\}, \mathcal{F}_2 = \{X, X+1, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{X^2-1, X^2+1, 2X\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

d) $\underline{E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{e^x, xe^x\}, \mathcal{F}_2 = \{\cos x, \sin x\}, \mathcal{F}_3 = \{x, \sin x\}$$

التمرين 07: ليكن $\mathbb{P}_2[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 ولتكن المجموعة $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$ حيث:

$$P_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), P_2(X) = -X(X-2), P_3(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$$

1) بين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[X]$.

2) ليكن $Q(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{P}_2[X]$ ، اكتب $Q(X)$ في الأساس $\mathcal{F}$.

التمرين 08: $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G = [\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$ ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$

-1 بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

-2 أوجد أساسا لكل من: $F \cap G, F+G, G, F$ (إن وجد)، محددا أبعادها.

-3 هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟