جامعة محمد خيضر بسكرة | السنة الأولى (MI+رياضيات)

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة | مقياس جبر2

قسم الرياضيات | 2023/2022

السلسلة رقم 01 (الفضاءات الشعاعية)

<u>التمرين 01</u>: نزود $\mathbb{R}^*$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus:\ \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\quad (x,y)\mapsto x\oplus y=xy \qquad\qquad \otimes:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\quad (\lambda,\ x)\mapsto \lambda\otimes x=x^{\lambda}$$

بين أن $(\mathbb{R}^*,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$.

<u>التمرين 02</u>: نعرف على $E=\mathbb{R}^2$ العمليتين:

$$\forall (x,y),(x',y')\in E:\qquad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\forall \alpha=a+ib\in\mathbb{C},\qquad (a+ib).(x,y)=(ax-by,ay+bx)$$

بين أن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

<u>التمرين 03</u>: في كل حالة من الحالات التالية، هل $(\mathbb{R}^2,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$؟

1) $\alpha.(x,y)=(\alpha x,y)$; $(x,y)+(x',y')=(y+y',x+x')$;
2) $\alpha.(x,y)=(\alpha x,-\alpha y)$; $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$;
3) $\alpha.(x,y)=(\alpha^2 x,\alpha^2 y)$; $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$;

<u>التمرين 04</u>: في كل حالة من الحالات التالية، تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

$$E=\mathbb{R}^2$$

$F_1=\{(x,y)\in E/\ 3x-y=0\}$
$F_2=\{(x,y)\in E/\ e^x e^y=0\}$
$F_3=\{(x,y)\in E/\ xy=0\}$

$$E=\mathbb{R}^3$$

$F_4=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=0\}$
$F_5=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=2\}$
$F_6=\{(x,y,z)\in E/\ z(x^2+y^2)=0\}$

$$E=\mathbb{P}_1[X]$$

$F_7=\{P\in E, P'(0)=3\}$
$F_8=\{P\in E, P(2)=P'(2)\}$
$F_9=\{P\in E, P(-1)=P(2)\}$

$$E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$F_{10}=\left\{f\in E/\ f\ \text{زوجية}\right\}$
$F_{11}=\left\{f\in E/\ f\ \text{متزايدة}\right\}$
$F_{12}=\{f\in E/\forall x\in\mathbb{R}: f(1-x)=f(x)\}$

التمرين 05: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. وليكن $U = (1,-3,2)$. $V = (2,-1,1)$

1) اكتب الشعاع $X = (1,7,-4)$ كعبارة خطية لـ U و V.

2) هل الشعاع $Y = (2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V؟

3) أوجد m بحيث $Z = (3,1,m) \in [\{U,V\}]$.

التمرين 06:

1) من بين العائلات التالية، ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(3,-1),(1,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(-1,1)\,,(3,-3)\}, \mathcal{F}_3 = \{(3,-1)\,,(1,1),(1,-2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2\,,3X,-1\}, \mathcal{F}_2 = \{X^2+X, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{2X^2-5{,}7X, 3X^2+4\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1)\,,(-1,1,0)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,-1)\,,(2,0,3)\,,(3,1,-1)\}$$

2) من بين العائلات التالية، ما هي المستقلة خطيا في E ؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(-1,3)\,,(0,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2)\,,(-1,1),(-1,2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2+1\,,X-2\}, \mathcal{F}_2 = \{X, X+1, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{X^2-1, X^2+1{,}2X\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1)\,,(0,2,2),(3,7,1)\,\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,0)\,,(0,1,1)\,,(1,1,1)\}$$

d) $\underline{E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{e^x\,, xe^x\}, \mathcal{F}_2 = \{\cos x\ \,, \sin x\}, \mathcal{F}_3 = \{x\,, \sin x\}$$

التمرين 07: ليكن $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 ولتكن المجموعة $\mathcal{F} = \{P_1\,,P_2\ \,,P_3\}$ حيث:

$$P_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)\,, P_2(X) = -X(X-2)\,, P_3(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$$

1) بين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$.

2) ليكن $Q(X) = aX^2+bX+c \in \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$. اكتب $Q(X)$ في الأساس $\mathcal{F}$.

التمرين 08: $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G = [\{(1,1,0)\,,(0,0,1)\,,(1,1,1)\,\}]$
ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x+y-z=0\}$

-1 بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

-2 أوجد أساسا لكل من: $F \cap G, F+G, G, F$ (إن وجد)، محددا أبعادها.

-3 هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

جامعة محمد خيضر بسكرة | السنة الأولى MI ورياضيات
ك.ع.د.ع.ط.ح | مقياس : جبر 2
قسم الرياضيات | 2023 / 2022

السلسلة 08

التمرين 08 : نزود $\mathbb{R}^*$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي :

$$\oplus : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(x,y) \longmapsto x \oplus y = xy$$

$$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \otimes x = x^\lambda$$

نبين أن : $\mathbb{R}^*$ مزود بالقانونين السابقين فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$:

نقول أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{K},+,\cdot)$ إذا تحقق :

① $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية :
- $\oplus$ تجميعية
- $\oplus$ تقبل عنصر حيادي
- لكل عنصر نظير بالنسبة لـ $\oplus$
- $\oplus$ تبديلية .

② $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \ \forall X,Y \in E$:

ⓐ $\alpha \otimes (X \oplus Y) = (\alpha \otimes X) \oplus (\alpha \otimes Y)$

ⓑ $(\alpha+\beta) \otimes X = (\alpha \otimes X) \oplus (\beta \otimes X)$

ⓒ $(\alpha \cdot \beta) \otimes X = \alpha \otimes (\beta \otimes X)$

ⓓ $1_{\mathbb{K}} \otimes X = X$

① $(\mathbb{R}^*,\oplus)$ زمرة تبديلية ؟

$\oplus$ تبديلية ؟ ليكن $x,y \in \mathbb{R}^*$:

$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$ (لأن الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$)

$\oplus$ تجميعية ؟ ليكن $x,y,z \in \mathbb{R}^*$

$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = xyz$

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = xyz$

العنصر الحيادي : $\exists e \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^* : x \oplus e = e \oplus x = x$

$\oplus$ تبديلية إذن :

$x \oplus e = x$

$\Rightarrow xe = x$

$x \neq 0 \Rightarrow e = 1$

العنصر النظير : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists x' \in \mathbb{R}^* : x \oplus x' = x' \oplus x = e$

$\oplus$ تبديلية إذن :

$x \oplus x' = e \Rightarrow xx' = 1$

$x \neq 0 \Rightarrow x' = \frac{1}{x}$

ومنه : $(\mathbb{R}^*,\oplus)$ زمرة تبديلية .

② ليكن $x,y \in \mathbb{R}^*$ ، $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

ⓐ $(\alpha+\beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$?

$(\alpha+\beta) \otimes x = x^{\alpha+\beta}$

$(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = x^\alpha \oplus x^\beta = x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

ⓑ $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$?

$\alpha \otimes (x \oplus y) = \alpha \otimes (xy) = (xy)^\alpha$.

$(\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y) = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

ⓒ $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$?

$(\alpha \cdot \beta) \otimes x = x^{\alpha\beta}$

$\alpha \otimes (\beta \otimes x) = \alpha \otimes (x^\beta) = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}$.

ⓓ $1_{\mathbb{R}} \otimes x = x$?

$1_{\mathbb{R}} \otimes x = 1 \otimes x = x^1 = x$

ومنه : $(\mathbb{R}^*,\oplus,\otimes)$ ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

التمرين 03: في كل حالة من الحالات التالية،

هل $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ؟

1)
$$\begin{cases}(x,y)+(x',y')=(y+y',x+x')\\ \alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,y)\end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$ لأن العملية $(+)$ ليست تجميعية:

ليكن $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$:

$$[(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')$$
$$=(y+y',x+x')+(x'',y'')=(x+x'+y'',y+y'+x'')\quad\ldots(1)$$
$$(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')]$$
$$=(x,y)+(y'+y'',x'+x'')=(y+x'+x'',x+y'+y'')\quad\ldots(2)$$
$$(1)\neq(2)$$

2)
$$\begin{cases}(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\\ \alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,-\alpha y)\end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$ لأن الشرط d) غير محقق:

$$1_K\cdot(x,y)=1_{\mathbb{R}}\cdot(x,y)=1\cdot(x,y)$$
$$=(1x,-1y)=(x,-y)\neq(x,y)$$

3)
$$\begin{cases}(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\\ \alpha\cdot(x,y)=(\alpha^2x,\alpha^2y)\end{cases}$$

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ليس ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$ لأن الشرط b) غير محقق:

$$(\alpha+\beta)\cdot(x,y)=((\alpha+\beta)^2x,(\alpha+\beta)^2y)\quad\ldots(1)$$
$$(\alpha\cdot(x,y))+(\beta\cdot(x,y))=(\alpha^2x,\alpha^2y)+(\beta^2x,\beta^2y)$$
$$=(\alpha^2x+\beta^2x,\alpha^2y+\beta^2y)$$
$$=((\alpha^2+\beta^2)x,(\alpha^2+\beta^2)y)\quad\ldots(2)$$
$$(1)\neq(2)$$

التمرين 05: ليكن $\mathbb{R}^3$ ف.ش على $\mathbb{R}$، وليكن

$V=(2,-1,1),\ U=(1,-3,2)$

1) نكتب الشعاع $X=(1,7,-4)$ كعبارة خطية لـ U و V:

X, U, V عناصر من ف.ش E ، يكون X عبارة خطية لـ U و V إذا وجد $\alpha,\beta\in K$ بحيث:

$$X=\alpha U+\beta V$$

X عبارة خطية لـ U و V إذا:

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ X=\alpha U+\beta V$$
$$\Rightarrow(1,7,-4)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$
$$=(\alpha,-3\alpha,2\alpha)+(2\beta,-\beta,\beta)$$
$$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=1\quad\ldots(1)\\-3\alpha-\beta=7\quad\ldots(2)\\2\alpha+\beta=-4\quad\ldots(3)\end{cases}$$

$$(2)+(3)\Rightarrow-\alpha=3\Rightarrow\alpha=-3$$
$$(1)\Rightarrow-3+2\beta=1\Rightarrow2\beta=4\Rightarrow\beta=2$$

إذن: $\exists\alpha=-3,\beta=2\in\mathbb{R}:\ X=-3U+2V$

2) هل الشعاع $Y=(2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V؟

Y عبارة خطية لـ U و V إذا:

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ Y=\alpha U+\beta V$$
$$\Rightarrow(2,-5,4)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$
$$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=2\quad\ldots(1)\\-3\alpha-\beta=-5\quad\ldots(2)\\2\alpha+\beta=4\quad\ldots(3)\end{cases}$$

$$(2)+(3)\Rightarrow-\alpha=-1\Rightarrow\alpha=1$$
$$(3)\Rightarrow2.1+\beta=4\Rightarrow\beta=2$$

نتأكد أن قيم $\alpha=1$, $\beta=2$ تحقق المعادلة الأولى:

$$1+2.2=5\neq2$$

ومنه: الشعاع $Y=(2,-5,4)$ ليس عبارة خطية لـ U و V

3) ايجاد m بحيث: $Z=(3,1,m)\in[\{U,V\}]$:

$$Z\in[\{U,V\}]\Rightarrow\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ Z=\alpha U+\beta V$$
$$\Rightarrow(3,1,m)=\alpha(1,-3,2)+\beta(2,-1,1)$$
$$=(\alpha+2\beta,-3\alpha-\beta,2\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=3\quad\ldots(1)\\-3\alpha-\beta=1\quad\ldots(2)\\2\alpha+\beta=m\quad\ldots(3)\end{cases}$$

$$(1)+2.(2)\Rightarrow-5\alpha=5\Rightarrow\alpha=-1$$
$$(1)\Rightarrow-1+2\beta=3\Rightarrow\beta=2$$
$$(3)\Rightarrow2.(-1)+2=0\Rightarrow m=0$$

$F_3=\{(x,y)\in E/\ x\,y=0\}$.

F_3 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists\, X=(1,0)\in F_3\ \ ((1,0)\in\mathbb{R}^2/\ 1.0=0$:لأن$)$

$\exists\, Y=(0,1)\in F_3\ \ ((0,1)\in\mathbb{R}^2/\ 0.1=0$:لأن$)$

لكن $X+Y=(1,0)+(0,1)=(1+0,0+1)=(1,1)$

$(1,1)\in\mathbb{R}^2/\ 1.1=1\neq 0$

$\Rightarrow (1,1)\notin F_3$

أي: $(X+Y)\notin F_3$

$*\ \underline{E=\mathbb{R}^3}$.

4) $F_4=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=0\}$.

$*$ ① $F_4\subset E$ (من تعريف المجموعة F_4).

$*$ $0_E=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3\ /\ 0+0+3\cdot0=0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in F_4 \Rightarrow F_4\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \ X,Y\in F_4$

$X\in F_4\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x+y+3z=0$.

$Y\in F_4\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/\ x'+y'+3z'=0$.

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$$

$$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+3(\alpha z+\beta z')$$
$$=\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'+3\alpha z+3\beta z'$$
$$=\alpha(\underbrace{x+y+3z}_{0})+\beta(\underbrace{x'+y'+3z'}_{0})$$
$$=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$$
$$=0$$
$$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F_4$$

ومنه: F_4 ف.ش.ج من E.

5) $F_5=\{(x,y,z)\in E/\ x+y+3z=2\}$.

F_5 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/\ 0+0+3.0=0\neq 2$.

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\notin F_5$

6) $F_6=\{(x,y,z)\in E/\ z(x^2+y^2)=0\}$.

F_6 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists X=(1,1,0)\in F_6\ \ ((1,1,0)\in\mathbb{R}^3/0.(1^2+1^2)=0)$

$\exists Y=(0,0,1)\in F_6\ \ ((0,0,1)\in\mathbb{R}^3/\ 1.(0^2+0^2)=0)$

لكن: $X+Y=(1,1,0)+(0,0,1)=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3/\ 1.(1^2+1^2)=2\neq 0$

$\Rightarrow (1,1,1)\notin F_6$

أي: $(X+Y)\notin F_6$.

<u>التمرين 04</u>: في كل حالة من الحالات التالية، تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E:

> E ف.ش. على الحقل $\mathbb{K}$، يكون F ف.ش. جزئي من E إذا تحقق:
>
> ① $\emptyset\neq F\subset E$ $(0_E\in F)$.
>
> ② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall X,Y\in F:\ (\alpha X+\beta Y)\in F$

$\underline{E=\mathbb{R}^2}$

1) $F_1=\{(x,y)\in E/\ 3x-y=0\}$.

$*$ ① ليكن $(x,y)\in F_1\Rightarrow (x,y)\in E\ /\ 3x-y=0$

$\Rightarrow F_1\subset E$

$*$ $0_E=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in\mathbb{R}^2:\ 3.0-0=0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}\in F_1\ \Rightarrow F_1\neq\emptyset$

② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in F_1:\ (\alpha X+\beta Y)\in F_1$??

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\ X,Y\in F_1$

$X\in F_1\Rightarrow X=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 3x-y=0$.

$Y\in F_1\Rightarrow Y=(x',y')\in\mathbb{R}^2:\ 3x'-y'=0$

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y)+\beta(x',y')$$
$$=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x',\beta y')$$
$$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^2$$

لكي يكون $(\alpha X+\beta Y)\in F_1$ يجب أن يكون:

$3(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')=0$??

$$3(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')$$
$$=3\alpha x+3\beta x'-\alpha y-\beta y'$$
$$=\alpha(\underbrace{3x-y}_{0})+\beta(\underbrace{3x'-y'}_{0})$$
$$=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$$
$$=0$$
$$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F_1$$

ومنه: F_1 ف.ش.ج من E.

2) $F_2=\{(x,y)\in E/\ e^x e^y=0\}$

F_2 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in\mathbb{R}^2/\ e^0.e^0=1\neq 0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}\notin F_2$

3)

> E ف.ش. على الحقل $\mathbb{K}$، يكون F ف.ش. جزئي من E إذا تحقق:
>
> ① $\emptyset\neq F\subset E$ $(0_E\in F)$
>
> ② $*$ $\forall X,Y\in F:\ (X+Y)\in F$
>
> $*$ $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall X\in F:\ (\alpha X)\in F$

* $E=\mathbb{P}_1[X]$

7) $F_7=\{P\in E / P'(0)=3\}$

F_7 ليس ف.ش.ج من E لأن :

$0_E = 0_{\mathbb{P}_1[X]} = \Theta(X) = 0.X+0 \in \mathbb{P}_1[X] / \Theta'(0)=0\neq 3$

كثير الحدود المعدوم

$\Rightarrow 0_{\mathbb{P}_1[X]} \notin F_7$.

8) $F_8=\{P\in E / P(2)=P'(2)\}$.

① * $F_8 \subset E$ (من تعريف المجموعة F_8).

* $0_E = 0_{\mathbb{P}_1[X]} = \Theta(X) = 0.X+0 \in \mathbb{P}_1[X] /$

$\Theta(2)=0 \ , \ \Theta'(2)=0$

أي : $\Theta(2)=\Theta'(2)$

$\Rightarrow \Theta(X)\in F_8 \Rightarrow F_8\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P,\varphi\in F_8$

$P\in F_8 \Rightarrow P\in E / P(2)=P'(2)$.

$\varphi\in F_8 \Rightarrow \varphi\in E / \varphi(2)=\varphi'(2)$

$(\alpha P+\beta\varphi)\in E /$ (لأن : مجموع كثيري حدود هو كثير حدود وجداء عدد حقيقي في كثير حدود هو كثير حدود)

$$\begin{aligned}(\alpha P+\beta\varphi)(2) &= (\alpha P)(2)+(\beta\varphi)(2)\\ &= \alpha.P(2)+\beta.\varphi(2)\\ &= \alpha.P'(2)+\beta.\varphi'(2)\\ &= (\alpha P)'(2)+(\beta\varphi)'(2)\\ &= (\alpha P+\beta\varphi)'(2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\alpha P+\beta\varphi)\in F_8$

ومنه : F_8 ف.ش.ج من E .

9) $F_9=\{P\in E / P(-1)=P(2)\}$.

① * $F_9 \subset E$ (من تعريف المجموعة F_9).

* $0_E = 0_{\mathbb{P}_1[X]} = \Theta(X) = 0.X+0 \in \mathbb{P}_1[X] /$

$\Theta(-1)=0 \ , \ \Theta(2)=0$

أي : $\Theta(-1)=\Theta(2)$

$\Rightarrow \Theta(X)\in F_9 \Rightarrow F_9\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P,\varphi\in F_9$

$P\in F_9 \Rightarrow P\in E / P(-1)=P(2)$.

$\varphi\in F_9 \Rightarrow \varphi\in E / \varphi(-1)=\varphi(2)$

$(\alpha P+\beta\varphi)\in E /$ (لأن : مجموع كثيري حدود هو كثير حدود وجداء عدد حقيقي في كثير حدود هو كثير حدود)

$$\begin{aligned}(\alpha P+\beta\varphi)(-1) &= (\alpha P)(-1)+(\beta\varphi)(-1)\\ &= \alpha.P(-1)+\beta.\varphi(-1)\\ &= \alpha.P(2)+\beta.\varphi(2)\\ &= (\alpha P)(2)+(\beta\varphi)(2)\\ &= (\alpha P+\beta\varphi)(2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\alpha P+\beta\varphi)\in F_9$

ومنه : F_9 ف.ش.ج من E .

التمرين 02: 1) من بين العائلات التالية، ماهي المولدة للفضاء الشعاعي E :

a $E = \mathbb{R}^2$

$F_1 = \{(3,-1),(1,1)\}$

ليكن E ف.ش على $\mathbb{K}$ و $\{e_i\}_{i\in I} \subset E$ عائلة من E
نقول أن $\{e_i\}_{i\in I}$ مولدة لـ E إذا كان كل عنصر $x \in E$
يكتب على شكل عبارة خطية لـ $\{e_i\}_{i\in I}$
$\forall x \in E, \exists \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{K} : x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$
أي: $[\{e_i\}_{i\in I}] = E$

$F = \{Y, Z\}$ مولدة لـ E
$\Leftarrow \forall X \in E, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : X = \alpha Y + \beta Z$

$\forall X \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : X = \alpha(3,-1) + \beta(1,1)$

$$\Rightarrow (x,y) = (3\alpha+\beta, -\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha+\beta & \cdots (1) \\ y = -\alpha+\beta & \cdots (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow 4\alpha = x-y \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{x-y}{4}}$.

$(2) \Rightarrow \beta = y+\alpha = y + \frac{x-y}{4} = \frac{4y+x-y}{4} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3y+x}{4}}$

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists \alpha = \frac{x-y}{4}, \beta = \frac{3y+x}{4} \in \mathbb{R} :$
$$X = \alpha(3,-1) + \beta(1,1)$$
إذن: F_1 تولد $\mathbb{R}^2$.

$F_2 = \{(-1,1),(3,-3)\}$.

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists \overset{??}{\alpha}, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha(-1,1) + \beta(3,-3)$

$(x,y) = \alpha(-1,1) + \beta(3,-3)$

$\Rightarrow (x,y) = (-\alpha+3\beta, \alpha-3\beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha+3\beta. \\ y = \alpha-3\beta \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$

نلاحظ أن: ليس جميع الثنائيات (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تحقق
$x = -y$

إذن: F_2 لا تولد $\mathbb{R}^2$.

طريقة ثانية: نريد معرفة هل F_2 مولد لـ $\mathbb{R}^2$، أي
$E = [\{(-1,1),(3,-3)\}]$??

$[\{(-1,1),(3,-3)\}]$
$= \{\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : X = \alpha(-1,1) + \beta(3,-3)\}$.
$= \{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha(-1,1) - 3\beta(-1,1)\}$.
$= \{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = (\alpha-3\beta)(-1,1)\}$.
$= [\{(-1,1)\}]$.

انطلاقا من النتيجة التالية:

إذا كان E ف.ش ذو بعد n $(\dim E = n)$ فإن:
- كل عائلة مستقلة تحوي على الأكثر n عنصر.
- كل عائلة مولدة تحوي على الأقل n عنصر.

نستنتج أن: F_2 ليست مولدة لـ E لأن:
إذن: $\text{card}\{(-1,1)\} = 1 < \dim E = 2$
$$E \neq [\{(-1,1)\}] = [\{(-1,1),(3,-3)\}]$$

$F_3 = \{(3,-1),(1,1),(1,-2)\}$.

انطلاقا من النتيجة التالية:

إذا كانت A مولدة لـ E و $A \subset B$ فإن: B مولدة أيضا لـ E.

نستنتج أن: F_3 مولدة لـ E لأن: F_1 مولدة لـ E و $F_1 \subset F_3$.

b $E = \mathbb{R}_2[X]$.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P(X) = aX^2 + bX + c$.

$F_1 = \{X^2, 3X, -1\}$.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \exists \overset{???}{\alpha, \beta, \gamma} \in \mathbb{R} : P(X) = \alpha(X^2) + \beta(3X) + \gamma(-1)$

$$\Rightarrow aX^2 + bX + c = \alpha X^2 + 3\beta X - \gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = 3\beta \\ c = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = a} \\ \boxed{\beta = \frac{b}{3}} \\ \boxed{\gamma = -c} \end{cases}$$

إذن: $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \exists \alpha = a, \beta = \frac{b}{3}, \gamma = -c \in \mathbb{R} :$
$$P(X) = \alpha(X^2) + \beta(3X) + \gamma(-1)$$
ومنه: F_1 مولدة لـ E.

$F_2 = \{X^2+X, X-1\}$.

لدينا: $\text{card}\, F_2 = 2 < \dim E = 3$
إذن: F_2 ليست مولدة لـ E.

$F_3 = \{2X^2-5, 7X, 3X^2+4\}$

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : P(X) = \alpha(2X^2-5) + \beta(7X) + \gamma(3X^2+4)$

$$\Rightarrow aX^2 + bX + c = \alpha(2X^2-5) + \beta(7X) + \gamma(3X^2+4)$$
$$= 2\alpha X^2 - 5\alpha + 7\beta X + 3\gamma X^2 + 4\gamma.$$

$$\Rightarrow aX^2 + bX + c = (2\alpha+3\gamma)X^2 + 7\beta X - 5\alpha + 4\gamma.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\gamma = a & \cdots (1) \\ 7\beta = b & \cdots (2) \\ -5\alpha + 4\gamma = c & \cdots (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \beta = \frac{b}{7}$

$(1) \Rightarrow \alpha = \frac{a-3\gamma}{2}$

$(3) \Rightarrow -5\left(\frac{a-3\gamma}{2}\right) + 4\gamma = c$

$\Rightarrow \frac{-5a+15\gamma+8\gamma}{2} = c \Rightarrow 23\gamma - 5a = 2c$

ⓐ $E=\mathbb{R}^2$.

✪ $\mathcal{F}_1=\{(-1,3),(0,1)\}$.

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow \alpha=\beta=0$???

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow(-\alpha, 3\alpha+\beta)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha=0 & \cdots ①\\ 3\alpha+\beta=0 & \cdots ②\end{cases}$

$① \Rightarrow \alpha=0$
$② \Rightarrow \beta=-3\alpha=0$ $\Rightarrow \boxed{\alpha=0}$ و $\boxed{\beta=0}$

اذن: $\mathcal{F}_1$ مستقلة خطيا.

✪ $\mathcal{F}_2=\{(1,2),(-1,1),(-1,2)\}$.

لتكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(1,2)+\beta(-1,1)+\gamma(-1,2)=0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow(\alpha-\beta-\gamma, 2\alpha+\beta+2\gamma)=(0,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma=0 & \cdots ①\\ 2\alpha+\beta+2\gamma=0 & \cdots ②\end{cases}$

$①+② \Rightarrow 3\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-3\alpha$.

$① \Rightarrow \alpha-\beta-(-3\alpha)=0 \Rightarrow -\beta+4\alpha=0\Rightarrow \beta=4\alpha$

$② \Rightarrow 2\alpha+4\alpha+2(-3\alpha)=0$
$\Rightarrow 6\alpha-6\alpha=0$

اذن: α تأخذ مالانهاية من القيم وبالتالي β وγ أيضا تأخذ مالانهاية من القيم

ومنه: العائلة $\mathcal{F}_2$ ليست مستقلة خطيا

طريقة ثانية: يمكن استعمال النتيجة السابقة:

لدينا: $card\, \mathcal{F}_2=3 > \dim E=2$

اذن: $\mathcal{F}_2$ ليست مستقلة خطيا.

طريقة ثالثة:

ملاحظة: اذا كانت العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ليست مستقلة خطيا فهي مرتبطة خطيا.
ونقول أن العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ مرتبطة خطيا إذا تحقق: أن أحد عناصر هذه العائلة هو مزج خطي لبقية العناصر.

نلاحظ أن: $(1,2)=-4(-1,1)+3(-1,2)$

ومنه: $\mathcal{F}_2$ ليست مستقلة خطيا.

ⓑ $E=\mathbb{R}_2[X]$

✪ $\mathcal{F}_1=\{X^2+1, X-2\}$.

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha(X^2+1)+\beta(X-2)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=\Theta(X)$

$\Rightarrow \alpha X^2+\beta X+(\alpha-2\beta)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=0.X^2+0.X+0.1$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha-2\beta=0\end{cases}$

ومنه: $\mathcal{F}_1$ مستقلة خطيا.

$\Rightarrow \gamma=\dfrac{5a+2c}{23}$

$\alpha=\dfrac{a-3\cdot\left(\frac{5a+2c}{23}\right)}{2}=\dfrac{\frac{23a-15a-6c}{23}}{2}$

$=\dfrac{8a-6c}{2.23}\Rightarrow \alpha=\dfrac{4a-3c}{23}$

اذن: $\forall P\in\mathbb{R}_2[X]: \exists\alpha=\frac{4a-3c}{23}, \exists\beta=\frac{b}{7}, \exists\gamma=\frac{5a+2c}{23}\in\mathbb{R}$

$P(X)=\alpha(2X^2-5)+\beta(7X)+\gamma(3X^2+4)$.

ومنه: $\mathcal{F}_3$ مولدة لـ E.

ⓒ $E=\mathbb{R}^3$.

✪ $\mathcal{F}_1=\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$.

لدينا: $card\, \mathcal{F}_1=2 < \dim E=3$

اذن: $\mathcal{F}_1$ ليست مولدة لـ E.

✪ $\mathcal{F}_2=\{(1,0,-1),(2,0,3),(3,1,-1)\}$.

$\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \overset{???}{\exists}\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$.

$\Rightarrow\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y,z)=(\alpha+2\beta+3\gamma, \gamma, -\alpha+3\beta-\gamma)$.

$\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta+3\gamma. & \cdots ①\\ y=\gamma & \cdots ②\\ z=-\alpha+3\beta-\gamma. & \cdots ③\end{cases}$

$② \Rightarrow \boxed{\gamma=y}$

$①+③ \Rightarrow x+z=5\beta+2\gamma \Rightarrow 5\beta=x+z-2y$.

$\Rightarrow \boxed{\beta=\dfrac{x+z-2y}{5}}$

$③ \Rightarrow -\alpha+3\left(\dfrac{x+z-2y}{5}\right)-y=z$

$\Rightarrow -\alpha+\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}y-y=z$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y}$

اذن: $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \exists\left(\alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y\right),$
$\left(\beta=\frac{x+z-2y}{5}\right),(\gamma=y)\in\mathbb{R}:$
$X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$

ومنه: $\mathcal{F}_2$ مولدة لـ E.

2) من بين العائلات التالية، ماهي المستقلة خطيا:

تعريف: نقول أن العائلة $\{x_i\}_{i\in I}$ أنها مستقلة خطيا إذا تحقق:

$\forall\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K}: \sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E\Rightarrow\lambda_i=0_{\mathbb{K}}, \forall i\in I$

حيث: $(E,+,.)$ ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.
$\{x_i\}_{i\in I}$ عائلة من الأشعة من E.
$\{\lambda_i\}_{i\in I}$ عائلة من السلميات من $\mathbb{K}$.

$F_2 = \{X, X+1, X-1\}$.

لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(X) + \beta(X+1) + \gamma(X-1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)X + (\beta-\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & \dots ① \\ \beta - \gamma = 0 & \dots ② \end{cases}$$

$② \Rightarrow \beta = \gamma$.

$① \Rightarrow \alpha + 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -2\gamma$.

$① \Rightarrow -2\gamma + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma - \gamma = 0$.

اذن: α، β، γ لها العديد من القيم

ومنه: العائلة F_2 ليست مستقلة خطيا.

بإمكاننا أيضا أن نلاحظ أن:

$$X = \frac{1}{2}(X+1) + \frac{1}{2}(X-1)$$

$F_3 = \{X^2-1, X^2+1, 2X\}$.

لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(X^2-1) + \beta(X^2+1) + \gamma(2X) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)X^2 + 2\gamma X + (\beta-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 & \dots ① \\ 2\gamma = 0 & \dots ② \\ \beta - \alpha = 0 & \dots ③ \end{cases}$$

$② \Rightarrow \gamma = 0$.

$① + ③ \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$① \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = 0$

ومنه: F_3 مستقلة خطيا.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$F_1 = \{e^x, xe^x\}$.

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^x + \beta x e^x = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (\alpha + \beta x)e^x = 0_E(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$e^x \neq 0 \Rightarrow \alpha + \beta x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه: F_1 مستقلة خطيا.

$F_2 = \{\cos x, \sin x\}$.

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cos x + \beta \sin x = 0_E(x)$.

$$\Rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

وبالخصوص، من أجل $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$: يكون لدينا على الترتيب:

$$\begin{cases} \alpha \cos 0 + \beta \sin 0 = 0 \\ \alpha \cos\frac{\pi}{2} + \beta \sin\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه: F_2 مستقلة خطيا.