التطبيقات الخطية:

تعريف: ليكن $(E,+,\cdot)$ و $(F,+,\cdot)$ فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ وليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيق

نقول أن f خطي إذا حقق الشرط التالي:

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall x,y\in E$:

$$f\left(\alpha \overset{(E)}{\cdot} x \overset{(E)}{+} \beta \overset{(E)}{\cdot} y\right) = \alpha \overset{(F)}{\cdot} f(x) \overset{(F)}{+} \beta \overset{(F)}{\cdot} f(y)$$

مثال:

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x$$

$$f(\alpha x+\beta y) = 2(\alpha x+\beta y)$$
$$= \alpha(2x)+\beta(2y)$$
$$= \alpha f(x)+\beta f(y)$$

f خطي.

ملاحظات:

1) $f: E\longrightarrow F$ خطي فإن

أ) $f(0_E)=0_F$

$$f(0_E)=f(0_{\mathbb{K}}\cdot x)=0_{\mathbb{K}}\cdot f(x)=0_F$$

ب) $f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in E$

$$f(-x)=f(-1_{\mathbb{K}}\cdot x)=-1_{\mathbb{K}}\cdot f(x)=-f(x)$$

2) تركيب التطبيقات الخطية تطبيق خطي

3) إذا كان f خطي تقابلي فإن f^{-1} كذلك

الخطي التقابلي يدعى isomorphisme

4) $f: E\longrightarrow E$ يسمى endomorphisme

5) $f: E\longrightarrow E$ تقابلي يسمى automorphisme

6) E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ و $f: E\longrightarrow \mathbb{K}$ خطي

نقول أن f شكل خطي على E

تعريف:

ليكن $f: E\longrightarrow F$ خطي

1) المجموعة

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in E / f(x)=0_F\}=f^{-1}(\{0_F\})$$

تسمى نواة f

$\operatorname{Ker} f\neq\emptyset$ لأن $0_E\in \operatorname{Ker} f$ $\left(f(0_E)=0_F\right)$

2) المجموعة

$$\operatorname{Im} f=\{f(x)\in F / x\in E\}=f(E)$$

تسمى صورة f

$\operatorname{Im} f\neq\emptyset$ لأن $\operatorname{Im} f\ni 0_F$

$$0_F=f(0_E)$$

نظرية: $f: E\longrightarrow F$ خطي

1) E_1 ف ش ج لـ E $\Leftarrow$ $f(E_1)$ ف ش ج لـ F

2) F_1 ف ش ج لـ F $\Leftarrow$ $f^{-1}(F_1)$ ف ش ج لـ E

البرهان:

1) $f(E_1)=\{f(x) / x\in E_1\}\subset F$

$f(E_1)\neq\emptyset$ لأن $0_E\in E_1$ و $F\ni 0_F=f(0_E)$

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall y,z\in f(E_1)$:

$$\alpha y+\beta z\in f(E_1)\ ?$$

$$y\in f(E_1) \Rightarrow \exists x_1\in E_1 : y=f(x_1)$$
$$z\in f(E_1) \Rightarrow \exists x_2\in E_1 : z=f(x_2)$$

$$\alpha y+\beta z=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$
$$= f(\underbrace{\alpha x_1+\beta x_2}_{x}) \quad (f \text{ خطي})$$
$$= f(x) \quad / x\in E_1$$

لأن E_1 ف ش ج من E

إذن $\alpha y+\beta z\in f(E_1)$

$0_F = f(0_E) \in F_1 \Rightarrow 0_E \in f^{-1}(F_1)$

اذن $f^{-1}(F_1) \neq \phi$

$\forall \alpha, \beta \in K, \forall y, z \in f^{-1}(F_1) : \alpha y + \beta z \in f^{-1}(F_1)$?

~~$y \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow \exists x \in E : y = f(x) \in F_1$~~

$y \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow f(y) \in F_1$

$z \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow f(z) \in F_1$

$\alpha f(y) + \beta f(z) \in F_1$ (F_1 ف ش ج من F)

$f(\alpha y + \beta z) \in F_1 \Rightarrow \alpha y + \beta z \in f^{-1}(F_1)$

نتيجة:

1) $Ker f = f^{-1}(\{0_F\})$ ف ش ج من E لأن $\{0_F\}$ ف ش ج من F

2) $Im f = f(E)$ ف ش ج من F لأن E ف ش ج من E

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي

f متباين $\Leftrightarrow Ker f = \{0_E\}$

البرهان:

• $\Leftarrow$ ؟

$x \in Ker f \Rightarrow f(x) = 0_F$

$\Rightarrow f(x) = f(0_E)$

$\Rightarrow x = 0_E$ (f متباين)

اذن $Ker f = \{0_E\}$

ولدينا $0_E \in Ker f \Leftarrow \{0_E\} \subset Ker f$

ومنه $Ker f = \{0_E\}$

• $\Rightarrow$ ؟

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_F$

$\Rightarrow f(x-y) = 0_F$

$\Rightarrow x - y \in Ker f = \{0_E\}$

$\Rightarrow x - y = 0_E \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ f متباين

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي،

$\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ مستقلة خطيا في E

f متباين $\Rightarrow$ $\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ م خ في F

البرهان:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \Rightarrow \lambda_i = 0_K \ \forall i = \overline{1,n}$?

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in Ker f$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$ (f متباين)

$\Rightarrow \lambda_i = 0_K \ \forall i = \overline{1,n}$ ($\{e_i\}$ م خ)

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي

$\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ عائلة من E

1) $f\left([\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}]\right) = [\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}]$

2) $E = [\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}] \Rightarrow Im f = [\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}]$

البرهان:

1) $y \in f\left([\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}]\right) \Leftrightarrow \exists \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset K :$

$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$

$\Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$

$\Leftrightarrow y \in [\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}]$

2) نتيجة من 1) لأن $Im f = f(E)$

رتبة تطبيق خطي:

تعريف: رتبة تطبيق خطي هو بعد فضاء الصورة ونرمز له بالرمز $rg f$

$rg f = \dim Im f$

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي

f غامر $\Leftrightarrow Im f = F$

البرهان: • $\forall y \in F : \exists x \in E : y = f(x) \Rightarrow y \in Im f \Rightarrow F \subset Im f$

• $Im f = F \Rightarrow f(E) = F \Rightarrow$ f غامر

التفكيك القانوني لتطبيق خطي:

$f: E \longrightarrow F$ خطي

إذن $f = i \circ b \circ s$

حيث: i: خطي متباين

b: خطي تقابلي

s: خطي غامر

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & F \\ E/\ker f \arrow[r, "b"] & \mathrm{Im} f \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

$s(x) = \bar{x}$ $\quad (xRy \Leftrightarrow x-y \in \ker f)$

$b(\bar{x}) = f(x)$

$i(f(x)) = f(x)$

إذن من خلال هذا التفكيك نستنتج انه يوجد تطبيق خطي تقابلي بين $E/\ker f$ و $\mathrm{Im} f$ ونكتب

$E/\ker f \simeq \mathrm{Im} f$

<u>نظرية</u>: E و F ف ش على $\mathbb{K}$:

$\dim E = \dim F \Leftrightarrow E \simeq F$

<u>البرهان</u>:

• $\Rightarrow$

$\dim F = \dim E = n$

ليكن $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس لـ E

$B_F = \{g_1, \dots, g_n\}$ أساس لـ F

نعرف التطبيق $f: E \longrightarrow F$ كما يلي:

نعلم انه $\forall x \in E: \exists! \{\alpha_i\}_{i=1..n} \subset \mathbb{K}: x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$

f خطي تقابلي؟

f خطي (بسيطة)

<u>f متباين؟</u> نبين أن <u>$\ker f = \{0_E\}$ ؟</u>

$x \in \ker f: x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$f(x) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = 0_F$

$\Rightarrow \alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$ (أساس $\{g_i\}_{i=1..n}$)

$\Rightarrow x = 0_E$

<u>f غامر؟</u> : نبين أن <u>$\mathrm{Im} f = F$ ؟</u>

$E = [\{e_i\}_{i=1..n}] \Rightarrow f(E) = [\{f(e_i)\}]$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = [\{f(e_i)\}_{i=1..n}]$

(f متباين) وحسب نظرية سابقة $\{f(e_i)\}$ مستقلة

إذن $\dim \mathrm{Im} f = n$ و $\mathrm{Im} f \subset F$

إذن $\mathrm{Im} f = F$

• $\Leftarrow$ <u>$\dim E = \dim F$ ؟</u>

ليكن $B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس لـ E

$\dim E = n$ ، نبين أن $\dim F = n$

$E \simeq F$ معناه يوجد f تقابلي بين E و F إذن $\mathrm{Im} f = F$

ونعلم أن $\mathrm{Im} f = [\{f(e_i)\}_{i=1..n}]$

<u>إذن</u> $\{f(e_i)\}$ ~~dim~~ مستقل

إذن $\dim F = n.$

<u>نظرية</u>: F ف ش ج لـ E و $\dim E = n$

إذن: $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$

<u>البرهان</u>: F ف ش ج لـ E حسب نظرية سابقة يوجد $G \subset E$ ف ش لـ E بحيث

$E = F \oplus G$ و

$\dim E = \dim F + \dim G$

ولدينا $E = F \oplus G \Rightarrow E/F \simeq G$

اذن $\dim E/F = \dim G$

ومنه $\dim E/F = \dim E - \dim F$

<u>نظرية</u>: $f : E \to F$ خطي، $\dim E = n$

اذن $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

<u>البرهان</u>: ليكن $B_E = \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ اساس لـ E اذن $\operatorname{Im} f = [\{f(a_i)\}_{i=\overline{1,n}}]$

أي $\dim \operatorname{Im} f \le n$

ولدينا حسب التفكيك القانوني لتطبيق خطي $E/\ker f \simeq \operatorname{Im} f$

أي $\dim E/\ker f = \dim \operatorname{Im} f$

وحسب النظرية السابقة $\dim E/\ker f = \dim E - \dim \ker f$

إذن $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

<u>نظرية</u>: $f : E \to F$ خطي و $\dim E = \dim F$ فان:

1) f متباين $\Rightarrow$ f تقابلي

2) f غامر $\Rightarrow$ f تقابلي

<u>البرهان</u>:

1) f غامر؟ بين أن $\operatorname{Im} f = F$؟

لدينا $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

و $\ker f = \{0_E\}$ لأن f متباين اذن $\dim \ker f = 0$ ومنه $\dim E = \dim \operatorname{Im} f$

اذن $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$

$\operatorname{Im} f \subset F$; $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$

اذن $\operatorname{Im} f = F$

2) f متباين؟

$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

f غامر اذن $\operatorname{Im} f = F$، $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$ ومنه

ولدينا $\dim E = \dim F$ اذن

$\dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow$ f متباين

<u>نظرية</u>: E و F ف.ش على $\mathbb{K}$، المجموعة $\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F : f \text{ خطي}\}$ مزودة بالعمليتين

$(f+g)(x) = f(x) \overset{F}{+} g(x)$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \overset{F}{\cdot} f(x)$

ف ش على $\mathbb{K}$

<u>البرهان</u>: (تمرين)

<u>نظرية</u>: $f : E \to F$ خطي، $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ E

f متباين $\Leftrightarrow$ $\{f(a_i)\}$ مستقلة خطيا

f غامر $\Leftrightarrow$ $\{f(a_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ مولد لـ F

f تقابل $\Leftrightarrow$ $\{f(a_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ اساس لـ F

<u>البرهان</u>: (تمرين)