التمرين 07: ليكن $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2 ولتكن المجموعة $\mathcal{F} = \{P_1 , P_2 \ , P_3\}$ حيث:

$$P_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2) \ , P_2(X) = -X(X-2) \ , P_3(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$$

1) بين أن $\mathcal{F}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$.

2) ليكن $Q(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]$. اكتب $Q(X)$ في الأساس $\mathcal{F}$.

التمرين 07: ليكن $\mathbb{P}_2[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 2، ولتكن الجملة $F=\{P_1, P_2, P_3\}$ حيث:

$$P_1(X)=\frac{1}{2}(X-1)(X-2),\quad P_2(X)=-X(X-2),$$
$$P_3(X)=\frac{1}{2}X(X-1).$$

1) نبين أن: F تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[X]$:

> ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ و $B=\{e_i\}_{i\in I}\subset E$.
> نقول أن B أساس لـ E إذا كانت:
> - B مولدة.
> - B مستقلة خطيا.

ملاحظة: إذا كان $\text{card}\, B=\dim E$ فإنه لاثبات أن B أساسا لـ E يكفي اثبات أحد الشرطين.

بما أن: $\text{card}\, F=3=\dim \mathbb{P}_2[X]$

فإنه يكفي اثبات أحد الشرطين

اذن: نثبت أن الجملة F مستقلة خطيا:

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha P_1(X)+\beta P_2(X)+\gamma P_3(X)=0_{\mathbb{P}_2[X]}$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)\right)+\beta\left(-X(X-2)\right)+\gamma\left(\frac{1}{2}X(X-1)\right)=\Theta(x)=0X^2+0X+0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha\left(X^2-2X-X+2\right)+\beta\left(-X^2+2X\right)+\frac{1}{2}\gamma\left(X^2-X\right)=\Theta(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha X^2-\frac{3}{2}\alpha X+\alpha-\beta X^2+2\beta X+\frac{1}{2}\gamma X^2-\frac{1}{2}\gamma X=\Theta(x)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\alpha-\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)X^2+\left(-\frac{3}{2}\alpha+2\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)X+\alpha=\Theta(x)=0X^2+0X+0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-\beta+\frac{1}{2}\gamma=0\\ -\frac{3}{2}\alpha+2\beta-\frac{1}{2}\gamma=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-2\beta+\gamma=0 & \dots ①\\ -3\alpha+4\beta-\gamma=0 & \dots ②\\ \alpha=0 & \dots ③\end{cases}$$

$③\Rightarrow \alpha=0$

$①+②\Rightarrow -2\alpha+2\beta=0$

$\Rightarrow -2\cdot 0+2\beta=0\Rightarrow \beta=0$

$①\Rightarrow \gamma=2\beta-\alpha=2\cdot 0-0\Rightarrow \gamma=0$

اذن: الجملة F مستقلة خطيا.

ومنه: F تشكل أساسا لـ $\mathbb{P}_2[X]$.

2) ليكن $Q(X)=aX^2+bX+c\in\mathbb{P}_2[X]$

كتابة $Q(X)$ في الأساس F:

$Q(X)$ يكتب في الأساس F بالشكل:

$$Q(X)=\alpha P_1(X)+\beta P_2(X)+\gamma P_3(X),\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

اذن: نبحث عن α، β، γ التي تحقق الكتابة السابقة.

$$Q(X)=\alpha\left(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)\right)+\beta\left(-X(X-2)\right)+\gamma\left(\frac{1}{2}X(X-1)\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\alpha-\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)X^2+\left(-\frac{3}{2}\alpha+2\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)X+\alpha$$

ولدينا: $Q(X)=aX^2+bX+c$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\alpha-\beta+\frac{1}{2}\gamma=a\\ -\frac{3}{2}\alpha+2\beta-\frac{1}{2}\gamma=b\\ \alpha=c\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-2\beta+\gamma=2a & \dots ①\\ -3\alpha+4\beta-\gamma=2b & \dots ②\\ \alpha=c & \dots ③\end{cases}$$

$③\Rightarrow c=\alpha$

$①+②\Rightarrow -2\alpha+2\beta=2a+2b$

$\Rightarrow 2\beta=2a+2b+2c$

$\Rightarrow \beta=a+b+c$

$①\Rightarrow \gamma=2a-\alpha+2\beta$

$=2a-c+2(a+b+c)$

$\Rightarrow \gamma=4a+2b+c$