التمرين 08: $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G = [\{(1,1,0)\ ,(0,0,1)\ ,(1,1,1)\ \}]$

ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2\,x + y - z = 0\}$

1- بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

2- أوجد أساسا لكل من: $F \cap G, F + G, G, F$ (إن وجد)، محددا أبعادها.

3- هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

التمرين 03 : $\mathbb{R}^3$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$ ، ليكن ف ش ج
$$G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$$
ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي :
$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$$
1) نبين أن : F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$:

① * $F\subset\mathbb{R}^3$ (من تعريف المجموعة F) .

* $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3 / 2\cdot0+0-0=0$
$$\Rightarrow(0,0,0)\in F \Rightarrow F\neq\emptyset$$
② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ، $X,Y\in F$

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y-z=0$.

$Y\in F\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/2x'+y'-z'=0$.

$(\alpha X+\beta Y)\in F$??

$$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$$
$$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')$$
$$=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'$$
$$=\alpha(\underbrace{2x+y-z}_{})+\beta(\underbrace{2x'+y'-z'}_{})$$
$$=\alpha\cdot0+\beta\cdot0$$
$$=0$$
$$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F$$
ومنه : F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.

2) ايجاد أساسا لكل من (معددا الابعاد) :

* $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y-z=0\}$.
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y=z\}$.

$$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)$$
$$=(x,y,2x+y)$$
$$=(x,0,2x)+(0,y,y)$$
$$=x(\underbrace{1,0,2}_{u_1})+y(\underbrace{0,1,1}_{u_2}) .$$
اذن : u_1 ، u_2 يولدان F ، ندرس الاستقلال الخطي لهما :

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha u_1+\beta u_2=0_{\mathbb{R}^3}$
$$\Rightarrow\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\2\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\ \beta=0$$
اذن : u_1 ، u_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا ل F و $\dim F=2$.

* $G=[\{(\underbrace{1,1,0}_{v_1}),(\underbrace{0,0,1}_{v_2}),(\underbrace{1,1,1}_{v_3})\}]$

v_1 ، v_2 ، v_3 تولد G ، ندرس الاستقلال الخطي لهذه الأشعة .

نلاحظ أن : $v_1+v_2=v_3$

اذن : ندرس الاستقلال الخطي ل v_1 ، v_2

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3}$
$$\Rightarrow\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow(\alpha,\alpha,\beta)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\ \beta=0$$
اذن : v_1 ، v_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا ل G و $\dim G=2$.

* $F+G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X=X_1+X_2\ ,\ X_1\in F\wedge X_2\in G\}$.
$$=[\{(\underbrace{1,0,2}_{u_1}),(\underbrace{0,1,1}_{u_2}),(\underbrace{1,1,0}_{v_1}),(\underbrace{0,0,1}_{v_2}),(\underbrace{1,1,1}_{v_3})\}]$$
$$F+G=[\{u_1,u_2,v_1,v_2\}]$$
نلاحظ أن : $u_1=v_1+3v_2-u_2$

اذن : ندرس الاستقلال الخطي لكل من : v_1 ، v_2 ، u_2

ليكن α ، β ، γ من $\mathbb{R}$ بحيث :
$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_2=0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Rightarrow\alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow(\alpha,\alpha+\gamma,\beta+\gamma)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\alpha+\gamma=0\\\beta+\gamma=0\end{cases}\begin{matrix}\Rightarrow\gamma=0\\\Rightarrow\beta=0\end{matrix}$$
اذن : v_1 ، v_2 ، u_2 مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا ل $(F+G)$ و $\dim(F+G)=3$.

* $F\cap G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X\in F\wedge X\in G\}$.
$$=\{X\in\mathbb{R}^3/\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}: X=\alpha u_1+\beta u_2 \ \wedge\ \exists\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=\alpha' v_1+\beta' v_2\}$$
$$=\{X\in\mathbb{R}^3/\exists\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=\alpha'(1,1,0)+\beta'(0,0,1)\}$$
$$=\{X\in\mathbb{R}^3/\exists\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}: X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',\beta')\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\alpha'\\\beta=\alpha'\\2\alpha+\beta=\beta'\end{cases}$$
$$\Rightarrow X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',2\alpha'+\alpha')$$
$$=(\alpha',\alpha',3\alpha')=\alpha'(\underbrace{1,1,3}_{V})$$
$$\Rightarrow F\cap G=[\{(\underbrace{1,1,3}_{V})\}]$$
اذن : $V=(1,1,3)$ يولد $(F\cap G)$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساسا ل $(F\cap G)$ و $\dim(F\cap G)=1$

3) هل $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ ؟

$$\mathbb{R}^3\overset{?}{=}F\oplus G\Leftrightarrow\begin{cases}① F+G=\mathbb{R}^3 \ ?\\② F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\} \ ?\end{cases}$$
$$F\cap G=[\{(1,1,3)\}]\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
$$\Rightarrow F\oplus G\neq\mathbb{R}^3 .$$