المصفوفات:

<u>تعريف</u>: ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي، $m,n\in\mathbb{N}^*$، نقول أن A مصفوفة من الصنف (m,n) (ذات نمط (m,n)) على $\mathbb{K}$ هذا يعني أن A جدول ذو m سطر و n عمود تحوي عناصر من $\mathbb{K}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij})$$

العنصر a_{ij} يوجد على تقاطع السطر i والعمود j

$$a_{ij}\in\mathbb{K}\ \forall i=\overline{1,m}\ \forall j=\overline{1,n}$$

<u>تعريف</u>: $A=(a_{ij})$، $B=(b_{ij})$ من الصنف (m,n)

1) $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\ \forall i=\overline{1,m},\forall j=\overline{1,n}$

2) اذا كان $m=n$ (عدد الأعمدة = عدد الأسطر) A تسمى مصفوفة مربعة ذات رتبة n

3) نقول أن A مصفوفة معدومة اذا:

$$a_{ij}=0_{\mathbb{K}}\ \forall i=\overline{1,m},\forall j=\overline{1,n}$$

4) يمكن تعريف المصفوفة $-A$

$$-A=(-a_{ij})$$

5) المصفوفة $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ حيث $\tilde{a}_{ij}=a_{ji}\ \forall i=\overline{1,m},\forall j=\overline{1,n}$ تسمى منقول A ونرمز لها بالرمز A^t وهي من الصنف (n,m)

منقول A تحول الأسطر إلى أعمدة والعكس

6) اذا كانت A مربعة $(m=n)$

أ) العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ تسمى عناصر القطر

ب) المصفوفة من الشكل

$$A=\begin{pmatrix} \ddots & a_{ij}\ i<j \\ i>j & \ddots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ddots & 0_{\mathbb{K}} \\ \equiv & \ddots \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة مثلثية سفلية

$$A=(a_{ij}) \Leftrightarrow (a_{ij}=0_{\mathbb{K}}\ \forall i<j)$$

ج) المصفوفة من الشكل $A=\begin{pmatrix} \ddots & \equiv \\ 0_{\mathbb{K}} & \ddots \end{pmatrix}$ تسمى مثلثية علوية

$$A=(a_{ij}) \Leftrightarrow (a_{ij}=0_{\mathbb{K}}\ \forall i>j)$$

د) المصفوفة من الشكل $A=\begin{pmatrix} \ddots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \ddots \end{pmatrix}$ تسمى قطرية

$$A=(a_{ij}) \Leftrightarrow (a_{ij}=0_{\mathbb{K}}\ \forall i\neq j)$$

(قطرية يعني مثلثية علوية وسفلية)

هـ) المصفوفة $I_n=\begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & & 0_{\mathbb{K}} \\ & \ddots & \\ 0_{\mathbb{K}} & & 1_{\mathbb{K}}\end{pmatrix}$.

تسمى مصفوفة الوحدة

<u>نظرية</u>: نرمز لفضاء المصفوفات من الصنف (m,n) على $\mathbb{K}$ بالرمز $M_{(m,n)}(\mathbb{K})$

نعرف عليه العمليتين $+$ و $\cdot$ بالشكل:

$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$$

$$A+B=C\in M_{(m,n)}\mathbb{K}$$

حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ \forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda\cdot A=D$$

حيث $d_{ij}=\lambda a_{ij}\ \forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

$(M_{(m,n)}\mathbb{K},+,\cdot)$ ف ش على $\mathbb{K}$

~~العنصر الحيادي~~

<u>نظرية</u>: $\dim M_{(m,n)}(\mathbb{K})=m\times n$

<u>البرهان</u>: نبرهن أن المجموعة $B=\{E_{ij}\mid i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$ (تحوي $m\times n$ مصفوفة)

أساس لـ $M_{(m,n)}(\mathbb{K})$ حيث

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & & 0_{\mathbb{K}} \\ & 1_{\mathbb{K}} & \\ 0_{\mathbb{K}} & & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}$$

$$E_{ij} = (e_{kl}) : \quad e_{kl} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & k=i,\ l=j \\ 0_{\mathbb{K}} & k\neq i,\ l\neq j \end{cases}$$

نبين انها مولدة و مستقلة

جداء مصفوفتين :

تعريف :

$A = (a_{ij}) \in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$

$B = (b_{ij}) \in M_{(n,p)}\mathbb{K}$

يمكن تعريف المصفوفة $A.B$

$$A.B = (c_{ij}) \in M_{(m,p)}(\mathbb{K})$$

كما يلي

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

العنصر c_{ij} هو الجداء السلمي

للسطر i ~~مع العمود~~ من A مع

العمود j من B

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (2, 0, 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\times1 + 0\times2 + 1\times4 = 6$$

$$c_{21} = (4\ -1\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\times1 - 1\times2 + 3\times4 = 14$$

$$c_{12} = (2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$c_{22} = (4\ -1\ 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -9$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$$

ملاحظات :

1) جداء المصفوفات ليس تبديلي

2) $A.(B+C) = A.B + A.C$

3) $(A+B).C = A.C + B.C$

4) $(A.B).C = (A.B).C$

5) $\lambda.(A.B) = (\lambda A).B = A.(\lambda B)$

نظرية : $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ حلقة واحدية

العنصر الحيادي لجداء المصفوفات المربعة

هو المصفوفة الحيادية $I_n = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & & 0_{\mathbb{K}} \\ & \ddots & \\ 0_{\mathbb{K}} & & 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}$

تعريف $A \in M_n(\mathbb{K})$

نقول أن A قابلة للقلب (العكس)

اذا وجدت مصفوفة $B \in M_n(\mathbb{K})$

حيث $A.B = B.A = I_n$.

نقول أن B مقلوب A ونرمز لها $B = A^{-1}$

المصفوفة المشاركة لتطبيق خطي

تعريف $f : E \longrightarrow F$ خطي

$B_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ اساس لـ E

$B_F = \{g_1, \dots, g_m\}$ أساس لـ F

المصفوفة المشاركة لـ f حسب الاساسين

B_E و B_F تكتب بالشكل :

$$M(f, B_E, B_F) \overset{\text{تعريفا}}{=\!=} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{array}$$

العمود الأول يحوي احداثيات $f(e_1)$ في الأساس B_F

" الثاني " $f(e_2)$ " "

" n " $f(e_n)$ في الأساس "

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_i \qquad j = \overline{1,n}$$

مثال: نعتبر $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (2x+z,\ 4x+5y-3z)$$

أوجد مصفوفة f في الأساسين القانونيين لـ $\mathbb{R}^3$ ، $\mathbb{R}^2$

$e_1=(1,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0)$ ، $e_3=(0,0,1)$

$$f(e_1) = (2,4) = 2(1,0)+4(0,1)$$

$$f(e_2) = (0,5) = 0\times(1,0)+5(0,1)$$

$$f(e_3) = (1,-3) = 1\times(1,0)+(-3)(0,1)$$

إذن المصفوفة المشاركة لـ f هي ~~[illegible]~~

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

نظرية: E و F ف ش ع $\mathbb{K}$ ، $\dim E = n, \dim F = m$

B_E أساس لـ E ، B_F أساس لـ F

$$M : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \longrightarrow M_{(m,n)}(\mathbb{K})$$

$$f \longmapsto M(f) = M(f, B_E, B_F)$$

M خطي تقابلي

نتيجة: $\forall A \in M_{(m,n)}(\mathbb{K}),\ \exists f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n) : A = M(f, B_m B_n)$

B_m ، B_n الأساسين القانونيين لـ $\mathbb{K}^n$ و $\mathbb{K}^m$.

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي

B_E, B_F أساسين لـ E و F على الترتيب

$x \in E\ ,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

احداثيات x في الأساس B_E

$$A = M(f, B_E, B_F)$$

~~$f(x) = \sum y_i$~~ $f(x) = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

احداثيات $f(x)$ في الأساس B_F

اذن $Y = A.X$

نظرية: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ ، $g\circ f$

B_E ، B_F ، B_G

$$M(g\circ f, B_E, B_G) = M(f, B_F, B_G) . M(g, B_E, B_F)$$

نظرية: $f : E \longrightarrow E$ خطي تقابلي

B_E أساس لـ E اذن:

1) $M(f, B_E, B_E)$ قابلة للقلب

2) $M(f^{-1}, B_E, B_E) = [M(f, B_E, B_E)]^{-1}$

تعريف:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \vdots \\ \leftarrow L_m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} \end{array} \quad (m,n)$$

$$rg(A) \stackrel{\text{ت}}{=} \dim[\{C_1,\dots,C_n\}]$$

رتبة مصفوفة هي ~~[illegible]~~ عدد الأعمدة المستقلة خطيا

ولدينا ايضا $rg(A) \stackrel{\text{تعريفا}}{=} \dim[L_1,\dots,L_m]$

عدد الأسطر المستقلة خطيا

نتائج

1) $rg(A) = rg(A^t)$

2) اذا كانت $A = M(f, B_E, B_F)$

فان $rg(A) = rg f$

3) $A \in M_n(\mathbb{K})$

A قابلة للقلب $\Leftrightarrow rg(A) = n$

مصفوفة العبور:

تعريف: E فش ع K

$B'_E=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ ، $B_E=\{e_1,\dots,e_n\}$

أساسين لـ E

$$Id_E : E \longrightarrow E$$

المصفوفة $P=M(Id_E, B'_E, B_E)$

تسمى مصفوفة العبور من الأساس B_E إلى الأساس B'_E

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n\end{array} \\ \hline & \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{array}$$

ملاحظات:

1) P مصفوفة مربعة قابلة للقلب

2) $P^{-1}=M(Id_E, B_E, B'_E)$

P^{-1} هي مصفوفة العبور من الأساس B'_E الى الأساس B_E

$$P^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} e'_1\\ \vdots \\ e'_n\end{array}$$

3) $x=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$

نريد ايجاد مركبات x في الأساس B'_E

$x=\sum_{j=1}^{n} \beta_j e'_j$?

$$x=\sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

اذن

$$\boxed{\alpha_i=\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ij}}$$

يوضع $X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$$X=PX' \ , \ X'=P^{-1}X$$

حيث P هي مصفوفة العبور

من B_E الى B'_E

تغيير الأساس:

نظرية: $f : E \longrightarrow F$ خطي

$B'_E=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ ، $B_E=\{e_1,\dots,e_n\}$

أساسين لـ E

$B'_F=\{g'_1,\dots,g'_m\}$ ، $B_F=\{g_1,\dots,g_m\}$

أساسين لـ F

$$P=(Id_E, B'_E, B_E)$$
$$Q=(Id_F, B'_F, B_F)$$
$$A=M(f, B_E, B_F)$$
$$B=M(f, B'_E, B'_F)$$

اذن

$$\boxed{B=Q^{-1}AP}$$

البرهان:

$$\begin{tikzcd} \underset{B'_E}{E} \arrow[r, "Id_E"] \arrow[rrr, bend right, "f=Id_F\circ f\circ Id_E"'] & \underset{B_E}{E} \arrow[r, "f"] & \underset{B_F}{F} \arrow[r, "Id_F"] & \underset{B'_F}{F} \end{tikzcd}$$

اذن:

$$M(f, B'_E, B'_F)=M(Id_F, B_F, B'_F)\cdot M(f, B_E, B_F)\cdot M(Id_E, B'_E, B_E)$$

أي

$$\boxed{B=Q^{-1}AP}$$