

السنة الأولى (MI+رياضيات)
مقياس جبر 2
2023/2022

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السلسلة رقم 02 (التطبيقات الخطية و المصفوفات)

التمرين 01: ليكن التطبيقين:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = (2x - y, x - y)$$

- 1- بين أن f و g خطيين.
- 2- أوجد $\text{Ker}f$. $\text{Ker}g$. $\text{Im}f$. $\text{Im}g$. $\text{rg}f$. $\text{rg}g$.
- 3- هل f و g متباينين؟ غامرين؟
- 4- هل $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ ؟
- 5- بين أنه: إذا كان $u \in \text{Im}f$ فإن $f(u) = u$.

المسألة ٥٤ التطبيقات الخطية

المقرن ٥٤ = ليكن التطبيقية :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = (2x-y, x-y)$$

١) نبين ان f و g خطيين :

تعريف: ليكن $(E, +, \cdot)$ و $(F, +, \cdot)$ ف.ش. على نفس الحقل K وليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيق.

نقول ان f خطي اذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E: f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

$$\forall x, y \in E: f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{①}$$

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in E: f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) \quad \text{②}$$

$x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = (x, y)$
 $y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow y = (x', y')$: $x, y \in E = \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ليكن ③

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = f((\alpha x, \alpha y) + (\beta x', \beta y'))$$

$$= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= \left(\frac{(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')}{2}, \frac{(\alpha y + \beta y') - (\alpha x + \beta x')}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y'}{2}, \frac{\alpha y + \beta y' - \alpha x - \beta x'}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x - \alpha y + \beta x' - \beta y'}{2}, \frac{\alpha y - \alpha x + \beta y' - \beta x'}{2} \right) \dots \text{①}$$

①

$$\begin{aligned}
\alpha f(X) + \beta f(Y) &= \alpha f(\overset{1}{x}, \overset{2}{y}) + \beta f(\overset{1}{x'}, \overset{2}{y'}) \\
&= \alpha \cdot \left(\frac{\overset{1}{x} - \overset{2}{y}}{2}, \frac{\overset{2}{y} - \overset{1}{x}}{2} \right) + \beta \cdot \left(\frac{\overset{1}{x'} - \overset{2}{y'}}{2}, \frac{\overset{2}{y'} - \overset{1}{x'}}{2} \right) \\
&= \left(\alpha \frac{x-y}{2}, \alpha \frac{y-x}{2} \right) + \left(\beta \frac{x'-y'}{2}, \beta \frac{y'-x'}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha x - \alpha y}{2}, \frac{\alpha y - \alpha x}{2} \right) + \left(\frac{\beta x' - \beta y'}{2}, \frac{\beta y' - \beta x'}{2} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha x - \alpha y + \beta x' - \beta y'}{2}, \frac{\alpha y - \alpha x + \beta y' - \beta x'}{2} \right) \quad \dots (2)
\end{aligned}$$

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y) \quad \text{من (1) و (2) نجد}$$

و $f = \sin$

$$X \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X = (x, y)$$

$$Y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow Y = (x', y')$$

$$X, Y \in E = \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ليكن } \textcircled{g}$$

$$g(\alpha X + \beta Y) = g(\alpha(x, y) + \beta(x', y'))$$

$$= g(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= (2(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'))$$

$$= (2\alpha x + 2\beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y')$$

$$= (2\alpha x - \alpha y + 2\beta x' - \beta y', \alpha x - \alpha y + \beta x' - \beta y')$$

$$= (2\alpha x - \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (2\beta x' - \beta y', \beta x' - \beta y')$$

$$= \alpha (2x - y, x - y) + \beta (2x' - y', x' - y')$$

$$= \alpha \cdot g(x, y) + \beta \cdot g(x', y')$$

$$= \alpha g(X) + \beta g(Y)$$

و $g = \sin$

②

(2) إيجاد $\text{Ker} f$ - $\text{Ker} g$, $\text{Im} f$ - $\text{Im} g$, $\text{Ker} g$ - $\text{Ker} f$

$f: E \rightarrow F$: $\text{Ker} f$ (3)

نواة التطبيق الخطية $\text{Ker} f = \{x \in E : f(x) = 0_F\} \subset E$

$\text{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow f$ متباينة

$\text{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$
 $= \{x = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0, 0)\}$

$f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = (0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases}$ *معادلتان متكافئتان* $\Rightarrow x-y=0$
 $\Rightarrow x=y$

$\Rightarrow \text{Ker} f = \{x = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

نبحث عن الأشعة التي تولد $\text{Ker} f$:

$x \in \text{Ker} f \Rightarrow x = (x, y) = (x, x) = x(1, 1)$

$\Rightarrow \text{Ker} f = \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]$ *كعدد حقيقي*

اذن $(1, 1)$ تولد $\text{Ker} f$ وهو متجه ذاتي فهو يشكل أساسا لـ $\text{Ker} f$

$\dim \text{Ker} f = 1$ و

$\text{Ker} f = \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right] \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

(3)

f ليس متباينة

f تطبيق خطي $f: E \rightarrow F$

$\text{Im} f$ \oplus

صورة التكنيغ المنطقي $\text{Im} f = \{f(x) \in F, \exists x \in E\} \subset F$
 $= \{y \in F, \exists x \in E: y = f(x)\} \subset F$

$\text{Im} f = F \Leftrightarrow f$ غامر

$\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^2, \exists x \in \mathbb{R}^2: y = f(x)\}$

$= \{y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists x = (x, y) \in \mathbb{R}^2: (x', y') = f(x, y)\}$

نبحث عن الأشعة التي تولد $\text{Im} f$:

$y \in \text{Im} f \Rightarrow y = (x', y') = f(x, y)$
 $= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$
 $= \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$
 $= \frac{x}{2}(1, -1) - \frac{y}{2}(1, -1)$
 $= \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) = \frac{(x-y)}{2}(1, -1)$
 عدد قياسي \mathbb{R}

اذن: $(1, -1)$ يولد $\text{Im} f$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساس له

$\text{Im} f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \text{Im} f = 1$ و

$\text{Im} f \subset F = \mathbb{R}^2$
 $\dim \text{Im} f = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Im} f \neq \mathbb{R}^2$

f ليس غامر

④

مركبة $\text{rg} f = \dim \text{Im} f$

$= \text{rg} f$ \oplus

$\text{rg} f = \dim \text{Im} f = 1$

Ker g ④

$$\begin{aligned} \text{Ker } g &= \{X \in \mathbb{R}^2 : g(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\ &= \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (0, 0)\} \end{aligned}$$

$$g(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2x - y, x - y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 & \dots (1) \\ x - y = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = y$$

$$(1) \Rightarrow 2x - x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

و g متباين

Im g ④

$$\begin{aligned} \text{Im } g &= \{Y \in \mathbb{R}^2, \exists X \in \mathbb{R}^2 : Y = g(X)\} \\ &= \{Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x', y') = g(x, y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \in \text{Im } g &\Rightarrow Y = (x', y') = g(x, y) \\ &= (2x - y, x - y) \\ &= (2x, x) + (-y, -y) \\ &= \underbrace{x}_{\text{متجه } v_1} (2, 1) + \underbrace{-y}_{\text{متجه } v_2} (1, 1) \end{aligned}$$

اذن: $(2, 1), (1, 1)$ يولدان $\text{Im } g$ في \mathbb{R}^2 .
لذلك الاستقلال الخطي لهما: ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha(2, 1) + \beta(1, 1) = (0, 0) \Rightarrow (2\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 & \dots (1) \\ \alpha + \beta = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

⑤

$$\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \quad : \text{اذن}$$

$$\textcircled{2} \mathbb{R}^2 = \text{Ker}f + \text{Im}f ?$$

$$(\text{Ker}f + \text{Im}f) \subset \mathbb{R}^2$$

لدينا

$$\dim(\text{Ker}f + \text{Im}f) = \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f - \dim(\text{Ker}f \cap \text{Im}f)$$

$$= 1 + 1 - 0$$

$$= 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 = \text{Ker}f + \text{Im}f \quad : \text{اذن}$$

$$\mathbb{R}^2 = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f \quad : \text{وبالتالي}$$

(5) ببساطة: اذا كان $u \in \text{Im}f$ فان $f(u) = u$

$$u \in \text{Im}f = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : u = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (\alpha, -\alpha)$$

$$f(u) = f(\alpha, -\alpha) = \left(\frac{\alpha - (-\alpha)}{2}, \frac{-\alpha - \alpha}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{2\alpha}{2}, \frac{-2\alpha}{2} \right) = (\alpha, -\alpha) = u.$$

(7)