جامعة محمد خيضر بسكرة — السنة الأولى (MI+رياضيات)

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة — مقياس جبر2

قسم الرياضيات — 2023/2022

واجب السلسلة 01

تمرين الفضاء الشعاعي

ليكن $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. نزود E بالعملية الداخلية $\oplus$ والعملية الخارجية $\otimes$ المعرفتين كما يلي:

$$\forall (x,y),(x',y') \in E:\ (x,y)\oplus(x',y') = (xx', y+y')$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E:\ \ \lambda\otimes(x,y) = \left(x^{\lambda}, \lambda y\right)$$

بين أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$.

تمرين الفضاء الشعاعي الجزئي

تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

$$E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$F_{10} = \{f \in E / f \text{ زوجية}\}$

$F_{11} = \{f \in E / f \text{ متزايدة}\}$

$F_{12} = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}: f(1-x) = f(x)\}$

تمرين التوليد والاستقلال الخطي

1) من بين العائلات التالية، ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(-1,3)\ ,(0,1)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[X]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2-1, X^2+1, 2X\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1)\ ,(0,2,2),(3,7,1)\ \}$$

2) من بين العائلات التالية، ما هي المستقلة خطيا في E ؟

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,2,3)\ ,(3,2,1)\ ,(4,4,4)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,1,0)\ ,(1,0,1),(0,1,1)\ \}$$

جامعة محمد خيضر بسكرة	السنة الأولى (MI+رياضيات)
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة	مقياس جبر2
قسم الرياضيات	2023/2022

واجب السلسلة 01

تمرين الفضاء الشعاعي

ليكن $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. نزود E بالعملية الداخلية $\oplus$ والعملية الخارجية $\otimes$ المعرفتين كما يلي:

$$\forall (x,y),(x',y')\in E:\ (x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in E:\ \ \lambda\otimes(x,y)=\left(x^{\lambda},\lambda y\right)$$

بين أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$.

التمرين 01: ليكن $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ ، نزود E بالعملية الداخلية $\oplus$ والعملية الخارجية $\otimes$ المعرفتين كما يلي:

$(x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\otimes(x,y)=(x^{\lambda},\lambda y)$

نبين أن: $(E,\oplus,\otimes)$ ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$:

1) $(E,\oplus)$ ز.ت ت؟

$\oplus$ تبديلية: ليكن $(x,y),(x',y')\in E$

$(x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$ (لأن الجمع والضرب تبديليان في $\mathbb{R}$)

$=(x'x,y'+y)=(x',y')\oplus(x,y)$

$\oplus$ تجميعية: ليكن $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in E$

$[(x,y)\oplus(x',y')]\oplus(x'',y'')=(xx',y+y')\oplus(x'',y'')$

$=((xx')x'',(y+y')+y'')$ (لأن الجمع والضرب تجميعيان في $\mathbb{R}$)

$=(x(x'x''),y+(y'+y''))$

$=(x,y)\oplus(x'x'',y'+y'')$

$=(x,y)\oplus[(x',y')\oplus(x'',y'')]$.

العنصر الحيادي:

$\exists(e_1,e_2)\in E,\forall(x,y)\in E:$

$(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\oplus(x,y)=(x,y)$

$\oplus$ تبديلية إذن: $(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)$

$\Rightarrow(xe_1,y+e_2)=(x,y)$

$\Rightarrow\begin{cases}xe_1=x\\ \wedge\\ y+e_2=y\end{cases}\overset{(x\neq0)}{\Longrightarrow}\begin{cases}e_1=1\\ \wedge\\ e_2=0\end{cases}\Rightarrow(e_1,e_2)=(1,0)$

العنصر النظير:

$\forall(x,y)\in E,\exists(x',y')\in E:$

$(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)=(e_1,e_2)$

$\oplus$ تبديلية إذن: $(x,y)\oplus(x',y')=(e_1,e_2)$

$\Rightarrow(xx',y+y')=(1,0)$

$\Rightarrow\begin{cases}xx'=1\\ \wedge\\ y+y'=0\end{cases}\overset{(x\neq0)}{\Longrightarrow}\begin{cases}x'=\frac{1}{x}\\ \wedge\\ y'=-y\end{cases}\Rightarrow(x',y')=\left(\frac{1}{x},-y\right)$

ومنه: $(E,\oplus)$ ز.ت.

2) ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ، $(x,y),(x',y')\in E$

a) $(\alpha+\beta)\otimes(x,y)\overset{?}{=}(\alpha\otimes(x,y))\oplus(\beta\otimes(x,y))$

$(\alpha+\beta)\otimes(x,y)=(x^{\alpha+\beta},(\alpha+\beta)y)$

$(\alpha\otimes(x,y))\oplus(\beta\otimes(x,y))=(x^{\alpha},\alpha y)\oplus(x^{\beta},\beta y)=(x^{\alpha}x^{\beta},\alpha y+\beta y)$

$=(x^{\alpha+\beta},(\alpha+\beta)y)$.

b) $\alpha\otimes[(x,y)\oplus(x',y')]\overset{?}{=}[\alpha\otimes(x,y)]\oplus[\alpha\otimes(x',y')]$

$\alpha\otimes[(x,y)\oplus(x',y')]=\alpha\otimes(xx',y+y')=((xx')^{\alpha},\alpha(y+y'))$.

$[\alpha\otimes(x,y)]\oplus[\alpha\otimes(x',y')]=(x^{\alpha},\alpha y)\oplus(x'^{\alpha},\alpha y')$

$=(x^{\alpha}x'^{\alpha},\alpha y+\alpha y')=((xx')^{\alpha},\alpha(y+y'))$.

c) $(\alpha\cdot\beta)\otimes(x,y)\overset{?}{=}\alpha\otimes(\beta\otimes(x,y))$

$(\alpha\cdot\beta)\otimes(x,y)=(x^{\alpha\beta},(\alpha\beta)y)$.

$\alpha\otimes(\beta\otimes(x,y))=\alpha\otimes(x^{\beta},\beta y)=((x^{\beta})^{\alpha},\alpha\beta y)=(x^{\alpha\beta},(\alpha\beta)y)$.

d) $1_{\mathbb{R}}\otimes(x,y)\overset{?}{=}(x,y)$

$1_{\mathbb{R}}\otimes(x,y)=1\otimes(x,y)=(x^{1},1.y)=(x,y)$

ومنه: $(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ ف.ش على الحقل $(\mathbb{R},+,.)$.

جامعة محمد خيضر بسكرة	السنة الأولى (MI+رياضيات)
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة	مقياس جبر2
قسم الرياضيات	2023/2022

واجب السلسلة 01

تمرين الفضاء الشعاعي الجزئي

تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

$$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$F_{10} = \{f \in E / \text{زوجية } f\}$

$F_{11} = \{f \in E / \text{ متزايدة } f\}$

$F_{12} = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}: f(1-x) = f(x)\}$

* $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

10) $F_{10} = \{f \in E / \text{زوجية } f\}$.

$= \{f \in E, x \in \mathbb{R} / f(-x) = f(x)\}$.

① * $F_{10} \subset E$ (من تعريف المجموعة F_{10})

* $0_E = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0(x)$ الدالة المعدومة

$0(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 0(x) = 0$.

$0(x) \in E \,/\, 0(-x) = 0$

$0(x) = 0$

$\Rightarrow 0(-x) = 0(x) = 0$.

$\Rightarrow 0(x) \in F_{10} \Rightarrow F_{10} \neq \emptyset$.

② ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in F_{10}$

$f \in F_{10} \Rightarrow f \in E / f(-x) = f(x)$

$g \in F_{10} \Rightarrow g \in E / g(-x) = f(x)$

$(\alpha f + \beta g) \in E /$

$(\alpha f + \beta g)(-x) = (\alpha f)(-x) + (\beta g)(-x)$

$= \alpha . f(-x) + \beta . g(-x)$

$= \alpha f(x) + \beta g(x)$

$= (\alpha f)(x) + (\beta g)(x)$

$= (\alpha f + \beta g)(x)$

$\Rightarrow (\alpha f + \beta g) \in F_{10}$

ومنه: F_{10} ف.ش.ج من E.

11) $F_{11} = \{f \in E / \text{متزايدة } f\}$.

F_{11} ليس ف.ش.ج من E لأن جداء دالة متزايدة بعدد حقيقي سالب ليس دالة متزايدة.

12) $F_{12} = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}: f(1-x) = f(x)\}$.

بنفس طريقة اثبات الحالة (10) نجد أن: F_{12} كذلك ف.ش.ج من E.

جامعة محمد خيضر بسكرة | السنة الأولى (MI+رياضيات)

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة | مقياس جبر2

قسم الرياضيات | 2023/2022

واجب السلسلة 01

تمرين التوليد والاستقلال الخطي

1) من بين العائلات التالية. ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $\underline{E=\mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1=\{(-1,3)\,,(0,1)\}$$

b) $\underline{E=\mathbb{P}_2[X]}$:

$$\mathcal{F}_1=\{X^2-1,X^2+1,2X\}$$

c) $\underline{E=\mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1=\{(1,0,1)\,,(0,2,2),(3,7,1)\,\}$$

2) من بين العائلات التالية. ما هي المستقلة خطيا في E ؟

c) $\underline{E=\mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1=\{(1,2,3)\,,(3,2,1)\,,(4,4,4)\},\mathcal{F}_2=\{(1,1,0)\,,(1,0,1),(0,1,1)\,\}$$

1) من بين العائلات التالية، ماهي المولدة للفضاء الشعاعي E:

a) $E=\mathbb{R}^2$

$\mathcal{F}_1=\{(-1,3),(0,1)\}$

$\forall X\in\mathbb{R}^2,\ \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ X=\alpha(-1,3)+\beta(0,1)$

$\Rightarrow(x,y)=(-\alpha,3\alpha+\beta)\Rightarrow\begin{cases}x=-\alpha & \cdots\ (1)\\ y=3\alpha+\beta & \cdots\ (2)\end{cases}$

$(1)\Rightarrow\boxed{\alpha=-x}$

$(2)\Rightarrow\beta=y-3\alpha=y+3x$

$\Rightarrow\boxed{\beta=y+3x}$

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \exists\alpha=-x,\ \beta=y+3x\in\mathbb{R}:$

$X=\alpha(-1,3)+\beta(0,1)$

اذن: $\mathcal{F}_1$ تولد $\mathbb{R}^2$.

b) $E=\mathbb{P}_2[X]$.

$\mathcal{F}_1=\{X^2-1,X^2+1,2X\}$.

$\forall P\in\mathbb{P}_2[X],\ \exists\overset{???}{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}:\ P(X)=\alpha(X^2-1)+\beta(X^2+1)+\gamma(2X)$

$\Rightarrow aX^2+bX+c=(\alpha+\beta)X^2+2\gamma X+(\beta-\alpha)$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=a & \cdots\ (1)\\ 2\gamma=b & \cdots\ (2)\\ \beta-\alpha=c & \cdots\ (3)\end{cases}$

$(2)\Rightarrow\boxed{\gamma=\frac{b}{2}}$

$(1)+(3)\Rightarrow2\beta=a+c\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{a+c}{2}}$

$(1)\Rightarrow\alpha=a-\beta=a-\frac{a+c}{2}=\frac{2a-a-c}{2}=\frac{a-c}{2}$

$\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{a-c}{2}}$

اذن: $\forall P\in\mathbb{P}_2[X],\ \exists\alpha=\frac{a-c}{2},\ \beta=\frac{a+c}{2},\ \gamma=\frac{b}{2}\in\mathbb{R}:$

$P(X)=\alpha(X^2-1)+\beta(X^2+1)+\gamma(2X)$

ومنه: $\mathcal{F}_1$ مولدة لـ E.

c) $E=\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{F}_1=\{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}$.

$\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists\overset{???}{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}:\ X=\alpha(1,0,1)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)$.

$\Rightarrow\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(\alpha+3\gamma,2\beta+7\gamma,\alpha+2\beta+\gamma)$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha+3\gamma & \cdots\ (1)\\ y=2\beta+7\gamma & \cdots\ (2)\\ z=\alpha+2\beta+\gamma & \cdots\ (3)\end{cases}$

$(1)\Rightarrow\alpha=x-3\gamma$

$(2)\Rightarrow\beta=\frac{y-7\gamma}{2}$

$(3)\Rightarrow(x-3\gamma)+\cancel{2}\left(\frac{y-7\gamma}{\cancel{2}}\right)+\gamma=z$

$\Rightarrow x-3\gamma+y-7\gamma+\gamma=z$

$\Rightarrow-9\gamma=z-x-y$

$\Rightarrow\boxed{\gamma=\frac{x+y-z}{9}}$

$\alpha=x-3\left(\frac{x+y-z}{9}\right)=x-\frac{x+y-z}{3}=\frac{3x-x-y+z}{3}=\frac{2x-y+z}{3}$

$\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{2x-y+z}{3}}$

$\beta=\frac{y-7\left(\frac{x+y-z}{9}\right)}{2}=\frac{\frac{9y-7x-7y+7z}{9}}{2}=\frac{2y-7x+7z}{18}$

$\Rightarrow\boxed{\beta=\frac{2y-7x+7z}{18}}$

ومنه: $\mathcal{F}_1$ مولدة لـ E.

2) من بين العائلات التالية، ماهي المستقلة خطيا :

c) $E = \mathbb{R}^3$:

- $F_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 & \dots (1) \\ \alpha+\gamma = 0 & \dots (2) \\ \beta+\gamma = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \beta = -\alpha$

$(2) \Rightarrow \gamma = -\alpha$

$(3) \Rightarrow -\alpha - \alpha = 0$.

$\Rightarrow -2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$.

ومنه : F_1 مستقلة خطيا .

- $F_2 = \{(1,2,3),(3,2,1),(4,4,4)\}$

نلاحظ أن : $(1,2,3)+(3,2,1) = (4,4,4)$

ومنه : F_2 ليست مستقلة خطيا فهي مرتبطة خطيا .

هل من بين العائلات التالية، ماهي المستقلة خطيا في E؟

c) $E=\mathbb{R}^3$:

$F_1=\{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}$

لتكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\alpha(1,0,1)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow(\alpha+3\gamma,2\beta+7\gamma,\alpha+2\beta+\gamma)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3\gamma=0 \quad \dots (1)\\ 2\beta+7\gamma=0 \quad \dots (2)\\ \alpha+2\beta+\gamma=0 \quad \dots (3)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow\alpha=-3\gamma$

$(2)\Rightarrow\beta=\frac{-7\gamma}{2}$

$(3)\Rightarrow-3\gamma+\cancel{2}\left(\frac{-7\gamma}{\cancel{2}}\right)+\gamma=0.$

$\Rightarrow -10\gamma+\gamma=0\Rightarrow-9\gamma=0\Rightarrow\gamma=0.$

$\Rightarrow\alpha=0$

$\Rightarrow\beta=0$

ومنه : F_1 مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^3$

$F_2=\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}.$

نلاحظ أن : $(1,0,0)+(0,1,1)=(1,1,1)$

ومنه : F_2 ليست مستقلة خطيا فهي مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^3$.

d) $F_3=\{x,\sin x\}.$

لتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha x+\beta\sin x=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\ ,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\alpha x+\beta\sin x=0_{\mathcal{F}}(x)\quad,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\alpha x+\beta\sin x=0\quad,\forall x\in\mathbb{R}$

وبالخصوص، من أجل $x=\pi$ و $x=\frac{\pi}{2}$، يكون لدينا على الترتيب :

$$\begin{cases}\alpha\cdot\pi+\beta\sin\pi=0\\ \alpha\cdot\frac{\pi}{2}+\beta\sin\frac{\pi}{2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\cdot\pi+\beta\cdot0=0 \quad \dots ①\\ \alpha\cdot\frac{\pi}{2}+\beta\cdot1=0 \quad \dots ②\end{cases}$$

① $\Rightarrow\alpha\cdot\pi=0\Rightarrow\alpha=0$

② $\Rightarrow\beta=-\alpha\cdot\frac{\pi}{2}=-0\cdot\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow\beta=0$

ومنه : F_3 مستقلة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.