القسم الثاني : الفائدة المركبة

نقول أن مبلغا مودعا بفوائد مركبة، إذا أضفنا الفوائد الناتجة في نهاية الفترة الأولى إلى أصل المبلغ، لتولد بدورها فوائدا للفترة الموالية، وهكذا دواليك. فمع نهاية كل فترة نضيف الفوائد البسيطة إلى أصل المبلغ.

I. جملة مبلغ واحد:

مدة التوظيف	المبلغ الذي يحسب على أساس الفوائد	الفائدة	الجملة
1	c	c.i	$c + c.i = c\,(1+i)$
2	$c\,(1+i)$	$c\,(1+i).i$	$c\,(1+i) + c(1+i).i = c\,(1+i)(1+i) = c(1+i)^2$
3	$c\,(1+i)^2$	$c\,(1+i)^2.i$	$c\,(1+i)^2 + c\,(1+i)^2.i = c(1+i)^2\,(1+i) = c\,(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$c\,(1+i)^{n-1}$	$c(1+i)^{n-1}.i$	$c\,(1+i)^n$

c : أصل المبلغ؛ i : معدل الفائدة؛ n : عدد الفترات؛ S : الجملة

إذن: جملة مبلغ واحد (c) مودع لمدة (n) بمعدل فائدة (i) هو

$$\boxed{S = c\,(1+i)^n}$$

ملاحظات:

- بما أن الفترة الزمنية تحسب للسنة الواحدة = 1 (عنصر حيادي) ، لذلك حذفت من الحساب أعلاه.
- من الجدول نلاحظ أن فوائد السنوات أو الفترات المتتالية تشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول (ci) وأساسها (1+i) وعدد حدودها (n).

$$s = L_1 \frac{r^{-n} - 1}{r - 1}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{c(i)} \quad \left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{1+\mathrm{i} \quad - 1}\right], \quad \mathrm{I} = \mathrm{c(i)} \quad \left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{c}[(1+\mathrm{i})^n - 1]}$$

مثال 1:

- ✓ احسب جملة مبلغ قدره 100.000دج، أودع لمدة 10 سنوات وهذا بمعدل فائدة مركبة يقدر ب 6٪.

الحل:

$$S = 100.000(1{,}06)^{10}$$

$$\boxed{S = 179.084{,}9DA}$$

مثال 2:

أحسب جملة مبلغ 100.000دج مودع لمدة 10 سنوات بمعدل سداسي 3٪.

المعدل سداسي معناه أن الفائدة تحسب كل سداسي (6 أشهر)، لذلك تحول المدة إلى سداسيات :

10 سنوات = 20 سداسي

$$S = 100.000(1{,}03)^{20}$$

$$\boxed{S = 180.610DA}$$

II- جملة عدة مبالغ:

يكفي أن نحسب جملة كل مبلغ على حدى ثم نجمعها مع بعضها البعض:

$$\boxed{s = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n}$$

II-1 جملة الدفعات المتساوية :

وهي المبالغ التي تتحول من عون اقتصادي إلى آخر، أو من شخص إلى آخر في نهاية كل سنة فهي دفعات سنوية (annuités) او في فترات متساوية تقل عند السنة (سداسية، ثلاثية، شهرية). وكما سبق الاشارة اليه في محور الفائدة بسيطة، فإن الدفعات تتميز ب:

1- قيمة الدفعات المقدمة دوريا متساوية.

2- الفترات الفاصلة بين دفعة واخرى متساوية.

3- معدل الفائدة ثابت.

كما ان هناك نوعان من الدفعات **من حيث تاريخ الدفع:**

1. **الدفعات العادية**: (**دفعات سداد، دفعات نهاية المدة**): موجهة لتسديد دين او لتغطية التزام سابق.
2. **الدفعات الفورية**: (**دفعات استثمار، دفعات بداية المدة**): وتهدف الى تكوين رأسمال.

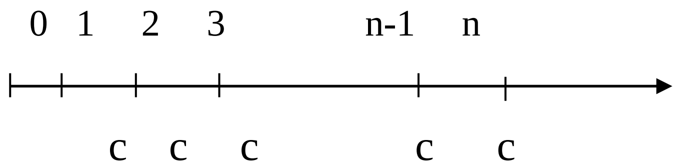
1) حالة الدفعات العادية:

تدفع في نهاية كل الفترة (سنوية، نصف سنوية.....الخ)

2) حالة الدفعات الفورية:

تدفع في بداية كل فترة (سنوية ، نصف سنوية.....الخ)

II–1–1 جملة الدفعات العادية:



نقوم بحساب جملة كل دفعة على حدى حسب مدة توظيفها كما هو موضح في البيان أعلاه، ثم نقوم بحساب مجموع أو جملة هاته المبالغ أو الدفعات كما في الجدول أدناه:

الدفعات	مدة الايداع	الجملة عند النقطة n
1	n-1	$c(1+i)^{n-1}$
2	n-2	$c(1+i)^{n-2}$
3	n-3	$c(1+i)^{n-3}$
.	.	.
.	.	.
n-1	1	$c(1+i)$
n	0	$c(1+i)^0 = c$

اذن جملة الدفعات S هي:

$$s = c(1+i)^{n-1} + c(1+i)^{n-2} + \cdots + c(1+i) + c$$

إن عناصر هذه الجملة تشكل متتالية هندسية حدها الاول $c(1+i)^{n-1}$ وأساسها $(1+\mathrm{i})^{-1}$.

$$s = L_1 \frac{r^{-n}-1}{r-1}$$

$$\mathrm{s} = \mathrm{c}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1}\left[\frac{((1+\mathrm{i})^{-1})^{\mathrm{n}}-1}{(1+\mathrm{i})^{-1}-1}\right]$$

$$s = c(1+i)^{n-1}\left[\frac{(1+i)^{-n}-1}{\frac{1}{(1+i)}-1}\right]$$

$$S = c\left[\frac{(1+i)^{-1}-(1+i)^{n-1}}{\frac{-i}{1+i}}\right]$$

$$S = c\left[\frac{(1+i)^{-1}-(1+i)^{n-1}}{-i}\right](1+i)$$

$$S = c\left[\frac{1-(1+i)^{n}}{-i}\right]$$

$$\boxed{S = c\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]}$$

حيث: c= قيمة الدفعة، i=معدل الفائدة، n= عدد الدفعات.

وهي القيمة التي يمكن ايجادها من الجدول المالي رقم 3.

مثال:

✓ احسب جملة 3 دفعات عادية متساوية قيمة كل منها 1.000 دج على ان $i=5\%$. وهذا بطريقتين :

ط1:

$$s_1 = 1.000(1,05)^2 \times 1.000(1,05) + 1.000 \Rightarrow S = 3.152,50DA$$

ط2:

$$S = 1.000\frac{((1,05)^3-1)}{0,05} = 3.152,50DA$$

II–1–2 جملة الدفعات الفورية:

الدفعات	مدة الايداع	الجملة عند النقطة n
1	n	$c(1+i)^{n}$
2	n-1	$c(1+i)^{n-1}$

n-1 n	2 1	$c(1+i)^2$ $c(1+i)$

$$S = c(1+i)^n + c(1+i)^{n-1} + \cdots + c(1+i)^2 + c(1+i)$$

وهي مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول $c(1+i)^n$ وأساسها $(1+i)^{-1}$

$$S = c(1+i)^n \left[\frac{((1+i)^{-1})^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1}\right]$$

$$S = c\left[\frac{1-(1+i)^n}{\frac{-i}{1+i}}\right]$$

$$S = c(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^n}{-i}\right]$$

$$\boxed{S = c(1+i)\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)}$$

أو

$$\boxed{S = c\left(\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right)}$$

مثال:

اودع شخص مبلغ 10.000دج في البنك في أول كل سنة، ابتداء من سنة 1988 وذلك لمدة 10 سنوات ثم توقف عن الايداع.

- ✓ ما هو رصيد هذا الشخص في اخر ديسمبر 2002 علما ان i=3%.

الحل:

الجملة في تاريخ 97/12/31 هي:

$$S = 10.000\left(\frac{(1{,}03)^{11} - 1}{0{,}03} - 1\right) = 118.077{,}96DA$$

الرصيد في 2002/12/31 هو:

$$118.077{,}96(1{,}03)^5 = 136.884{,}7DA$$

القيمة الحالية:

1- القيمة الحالية لمبلغ واحد:

نعلم أن $S = c(1+i)^n$ وعليه:

$$\boxed{c = s(1+i)^{-n}}$$

وتحسب من الجدول المالي رقم 2.

مثال:

- ✓ أحسب القيمة الحالية لمبلغ 20.000دج يسدد في نهاية 12 سنة و6 اشهر بمعدل فائدة اسمي سنوي 6% يدفع 4 مرات في السنة.

الحل:

المعدل الثلاثي الحقيقي هو $\frac{6}{4}$ =1,5%.

عدد الفترات $12{,}5 \times 4 = 50$فترة.

اذن :

$$c = 20.000(1{,}015)^{-50} = 9.500{,}94DA$$

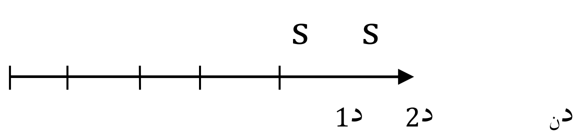
2 القيمة الحالية لعدة مبالغ:

لحساب القيمة الحالية لعدة مبالغ، يكفي ان نحسب القيمة الحالية لكل مبلغ على حدى ثم نجمعها مع بعضها البعض كما يلي :

$$\boxed{c = s_1(1+i)^{-n_1} + s_2(1+i)^{-n_2} + \cdots + s_n(1+i)^{-n_n}}$$

2-1 القيمة الحالية للدفعات المتساوية:

أ- الدفعات العادية:



الدفعات	المدة	القيمة الحالية
1	1	$S(1+i)^{-1}$
2	2	$S(1+i)^{-2}$
n	n	$S(1+i)^{-n}$

$$VA = c = S(1+i)^{-1} + S(1+i)^{-2} + \cdots + S(1+i)^{-n}$$

وهي مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول $S(1+\mathrm{i})^{-1}$ واساسها $(1+\mathrm{i})^{-1}$.

$$c = s(1+\mathrm{i})^{-1}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{-n}-1}{(1+\mathrm{i})^{-1}-1}\right]$$

$$\mathrm{c} = \mathrm{s}(1+\mathrm{i})^{-1}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{-n}-1}{-\mathrm{i}}\right](1+\mathrm{i})$$

$$c = \mathrm{s}\left[\frac{(1+\mathrm{i})^{-n}-1}{-\mathrm{i}}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{c} = \mathrm{s}\left(\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n}}{\mathrm{i}}\right)}$$

تحسب هذه القيمة من الجدول المالي رقم 4.

ب– الدفعات الفورية:

الدفعة	المدة	القيمة الحالية
1	0	S
2	1	$s(1+\mathrm{i})^{-1}$
3	2	$s(1+\mathrm{i})^{-2}$
n	n-1	$s(1+\mathrm{i})^{-n+1}$

$$\mathrm{c} = \mathrm{s} + \mathrm{s}(1+\mathrm{i})^{-1} + \mathrm{s}(1+\mathrm{i})^{-2} + \cdots + \mathrm{s}(1+\mathrm{i})^{-n+1}$$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول S وأساسها $(1+\mathrm{i})^{-1}$

$$\mathrm{c} = \mathrm{s}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^{-n}-1}{(1+\mathrm{i})^{-1}-1}\right)$$

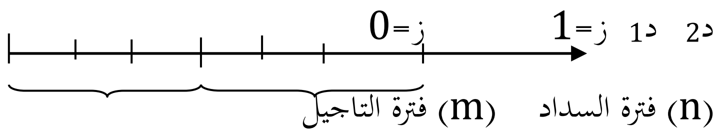
$$\mathrm{c} = \mathrm{s}(1+\mathrm{i})\left(\frac{(1+\mathrm{i})^{-n}-1}{-\mathrm{i}}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{c} = \mathrm{s}(1+\mathrm{i})\left(\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n}}{\mathrm{i}}\right)}$$

أو

$$\boxed{\mathrm{c} = \mathrm{s}\left(\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-n+1}}{\mathrm{i}}+1\right)}$$

ج–الدفعات العادية المؤجلة:



وجدنا سابقا انه:

عند النقطة (ز=1) فان القيمة الحالية للدفعات هي $c = s\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$

وباعتبار ان (c) هو مبلغ واحد، ففي النقطة ز=1 تكون القيمة الحالية لمبلغ واحد هي:

$$\boxed{c = s\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right][1+i]^{-m}}$$

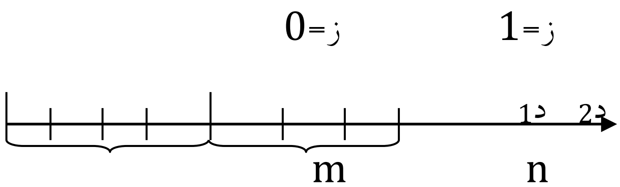
مثال:

أحسب القيمة الحالية ل 10 دفعات سنوية تدفع الاولى بعد 5 سنوات، قيمة كل منها 2.000دج علما أن t=5% .

$$c = 2.000\left(\frac{1-(1{,}05)^{-10}}{0{,}05}\right)(1{,}05)^{-4}$$

$$c = 12.705{,}38 \text{ DA}$$

د– الدفعات الفورية المؤجلة:



إعتمادا على نفس منهجية البرهان السابقة ، نجد في النهاية :

$$\boxed{c = \left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}+1\right][1+i]^{-m}}$$