5.4 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 4*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

أحسب التّكاملات التالية عن طريق التّكامل بالتجزئة.

Compute the following integrals by integration by parts.

$$1)\int x^2\ln x\,dx. \qquad 2)\int x\arctan x dx.$$
$$3)\int \ln x dx \quad \textit{then} \quad \int(\ln x)^2\,dx. \qquad 4)\int \cos x\exp x\,dx.$$

Solution - الحــل

- $\int x^2\ln x\,dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u=\ln x$ و $v'=x^2$.

Let's integrate by parts where we put $u=\ln x$ and $v'=x^2$.

ومنه $u'=\frac{1}{x}$ و $v=\frac{x^3}{3}$.

then $u'=\frac{1}{x}$ and $v=\frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\int \ln x\cdot x^2\,dx &= \int uv' = [uv]-\int u'v = \left[\ln x\cdot\frac{x^3}{3}\right]-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx\\ &= \left[\ln x\cdot\frac{x^3}{3}\right]-\int\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c.\end{aligned}$$

- $\int x\arctan x\,dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u=\arctan x$ و $v'=x$. ومنه $u'=\frac{1}{1+x^2}$ و $v=\frac{x^2}{2}$.

Let's integrate by parts where $u=\arctan x$ and $v'=x$. These include $u'=\frac{1}{1+x^2}$ and $v=\frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \arctan x\cdot x\,dx &= \int uv' = [uv]-\int u'v\\ &= \left[\arctan x\cdot\frac{x^2}{2}\right]-\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\arctan x \cdot \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\
&= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c
\end{aligned}
$$

- $\int \ln x\, dx$ then $\int (\ln x)^2\, dx$

من أجل التكامل : $\int \ln x\, dx$ **بإستعمال التكامل بالتجزئة حيث** $u = \ln x$ **و** $v' = 1$. **ومنه** $u' = \frac{1}{x}$ **و** $v = x$.

In order to integrate: $\int \ln x\, dx$ using integration by parts, where $u = \ln x$ and $v' = 1$. Then $u' = \frac{1}{x}$ and $v = x$.

$$
\begin{aligned}
\int \ln x\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= [\ln x \cdot x] - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx \\
&= [\ln x \cdot x] - \int 1\, dx \\
&= x\ln x - x + c
\end{aligned}
$$

نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $\int (\ln x)^2\, dx$ **حيث** $u = (\ln x)^2$ **و** $v' = 1$. **ومنه** $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ **و** $v = x$.

We use integration by parts to calculate $\int (\ln x)^2\, dx$ where $u = (\ln x)^2$ and $v' = 1$. Of which $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ and $v = x$.

$$
\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&= \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\, dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c
\end{aligned}
$$

للحصول على السطر الأخير ، استخدمنا التكامل المحسوب سابقا.

To get the last line, we used the previously computed integral.

- نضع $I = \int \cos x \exp x \, dx$.

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث $u = \exp x$ و $v' = \cos x$. ومنه $u' = \exp x$ و $v = \sin x$. إذن:

We use the integral by parts where $u = \exp x$ and $v' = \cos x$. Then, $u' = \exp x$ and $v = \sin x$. So:

$$I = \int \cos x \exp x \, dx = \big[\sin x \exp x\big] - \int \sin x \exp x \, dx$$

إذا فرضنا أن: $J = \int \sin x \exp x \, dx$ فإننا نحصل على:

If we assume that: $J = \int \sin x \exp x \, dx$, then we get:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J$$

من أجل حساب J نعيد استعمال التكامل بالتجزئة مرة أخرى مع $u = \exp x$ و $v' = \sin x$. هذا يعطينا:

In order to calculate J we use integration by parts again with $u = \exp x$ and $v' = \sin x$. This gives us:

$$J = \int \sin x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

إذن لدينا معادلة ثانية:

So we have a second equation:

$$J = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

نعوض J بقيمتها في المعادلة السابقة نجد:

Substituting J for its value in the previous equation, we find:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J = \big[\sin x \exp x\big] - \big[-\cos x \exp x\big] - I$$

where حيث

$$2I = \left[\sin x \exp x\right] + \left[\cos x \exp x\right]$$

وهذا ما يسمح لنا بحساب التكامل:

This allows us to calculate the integral:

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\exp x + c.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية، مع تحديد مجال تعريف التكامل إذا لزم الأمر:

Calculate the following integrals, specifying the integral domain definition if is necessary:

1) $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$. 2) $\int \cos^4 x dx$. 3) $\int \cos^{2003} x \sin x dx$.
4) $\int \frac{1}{\sin x} dx$. 5) $\int \frac{1}{\cos x} dx$. 6) $\int \frac{1}{7 + \tan x} dx$.

Solution - الحل

- The integral is defined at $\mathbb{R}$. التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

- The integral is defined at $\mathbb{R}$. التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$$

- The integral is defined at $\mathbb{R}$. التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^{2003} x \sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$$

- The integral is defined at $]k\pi, (k+1)\pi[$. التكامل معرف على $]k\pi, (k+1)\pi[$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| + c = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

(Change the variable $u = \cos x$ or $u = \tan \frac{x}{2}$). (تغيير المتغير $u = \cos x$ أو $u = \tan \frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

The integral is defined at $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\sin x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

(Change the variable $u=\sin x$ or $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على المجال $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

The integral is defined at $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

$$\int \frac{1}{7+\tan x} dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x+7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$$

(تغيير المتغير $u=\tan x$).

(Change the variable $u=\tan x$).

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية عن طريق تغيير المتغير.

Calculate the following integrals by changing the variable.

$$1)\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx. \quad 2)\int\frac{1}{x\ln x}\,dx.$$
$$3)\int\frac{1}{3+\exp(-x)}dx. \quad 4)\int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx.$$

Solution - الحل

- $\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx$

نضع تغيير المتغير $u=\cos x$ لدينا $x=\arccos u$ و $du=-\sin x\,dx$ نحصل على

We put the variable change $u=\cos x$ we have $x=\arccos u$ and $du=-\sin x\,dx$ we get:

$$\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235}u^{1235} + c = -\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235} + c$$

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$. هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\ln x$ لدينا $x=\exp u$ و $du=\frac{dx}{x}$ نكتب :

Let the change of variable $u=\ln x$, then we have $x=\exp u$ and $du=\frac{dx}{x}$ we write:

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\ln x|+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $]0,1[$ أو على $]1,+\infty[$ (الثابت قد يكون مختلف بالنسبة للمجالين).

This primitive function is defined as $]0,1[$ or $]1,+\infty[$ (the constant may be different for the two intervals).

- $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\exp x$. ومنه $x=\ln u$ و $du=\exp x\,dx$ الذي يكتب أيضا $dx=\frac{du}{u}$.

Let the variable be changed to $u=\exp x$. Including $x=\ln u$ and $du=\exp x\,dx$ which also writes $dx=\frac{du}{u}$.

$$\int \frac{dx}{3+\exp(-x)}=\int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\left(\frac{du}{u}\right)=\int \frac{du}{3u+1}=\frac{1}{3}\ln|3u+1|+c=\frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

الغرض من تغيير المتغير هو اختزاله إلى شيء معروف. لدينا هنا كسر بجذر تربيعي في المقام وتحت الجذر كثير حدود من الدرجة 2. ما نعرفه هو كيف نكامل

The purposed of changing a variable is to reduce it to something known. Here we have a fraction with a square root in the denominator and under the root a polynomial of degree 2. What we know is how to integrate

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+c,$$

لأننا نعرف مشتقة الدالة $\arcsin(t)$ وهو

Because we know the derivative of the function $\arcsin(t)$ which is

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

لذلك سنحاول العودة إليه. لنحاول كتابة ما تحت الجذر $4x - x^2$ على الشكل

We will try to get back to it. Let's try to write under the radical $4x - x^2$ in the form

$$1 - t^2 : 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2\right).$$

لذلك من الطبيعي تجربة تغيير المتغير $u = \frac{1}{2}x - 1$ من أجله يكون: $4x - x^2 = 4(1 - u^2)$ و $dx = 2du$.

So it is natural to experiment with changing the variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ for it is: $4x - x^2 = 4(1 - u^2)$ and $dx = 2du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{2du}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

الدالة $\arcsin u$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $u \in]-1,1[$ هذه الدالة الأصلية معرفة على $x \in]0,4[$.

The function $\arcsin u$ is defined and is differentiable on $u \in]-1,1[$. This primitive function is defined on $x \in]0,4[$.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

أحسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنيات المعادلات

Calculate the area of the region bounded by the curves of the equations

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ and } y = \frac{1}{1+x^2}.$$

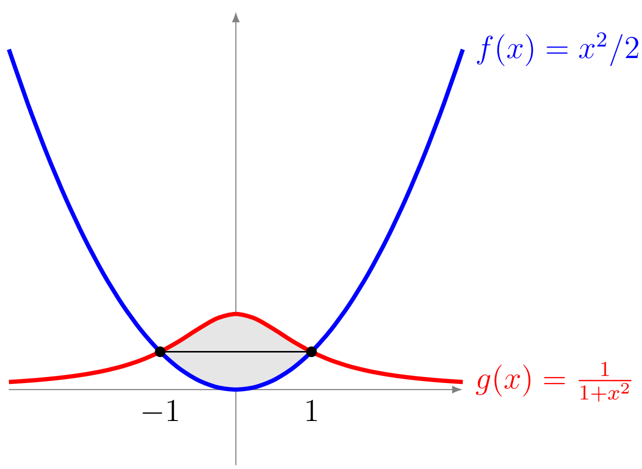
Solution - الحل

منحنى الدالة $y = x^2/2$ هو قطع مكافئ ، و منحنى الدالة $y = \frac{1}{1+x^2}$ منحنى الجرس. برسم الرسمين البيانيين. معا يحدد هذان المنحنيان المنطقة التي سنقوم بحسابها.

The graph of the function $y = x^2/2$ is a parabola, and the graph of the function $y = \frac{1}{1+x^2}$ is a bell curve. Draw the two graphs. Together, these two curves define the area that we are going to calculate.

بادئ ذي بدء ، يتقاطع هذان المنحنيان عند نقاط الإحداثية $x = +1$ و $x = -1$: يمكن تخمين ذلك على الرسم البياني ثم التحقق منه عن طريق حل المعادلة $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Firstly, these two curves intersect at the coordinate points $x = +1$ and $x = -1$: this can be guessed on the graph and then verified by solving the equation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.



We will calculate two areas: **سنحسب مساحتين:**

- **المساحة $\mathcal{A}_1$ للمنطقة تحت القطع المكافئ ، وفوق محور الإحداثية وبين سطور المعادلة $(x = -1)$ و $(x = +1)$. ومنه :**

The $\mathcal{A}_1$ area of the region under the parabola, above the ordinate axis and between the lines of the equation $(x = -1)$ and $(x = +1)$. Including:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

- **المساحة $\mathcal{A}_2$للمنطقة الواقعة تحت الجرس ، وفوق محور الإحداثيات وبين خطوط المعادلة $(x = -1)$ و $(x = +1)$. ومنه:**

The area $\mathcal{A}_2$ for the area under the bell, above the ordinate axis and between the equation lines $(x = -1)$ and $(x = +1)$. Including:

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

- **المساحة $\mathcal{A}$ تحت الجرس وفوق القطع المكافئ تساوي:**

The area $\mathcal{A}$ under the bell and above the parabola is:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حلل الكسور التالية ثم أوجد الدوال الأصلية.

Factorize the following fractions and then find the primitive functions.

1)	$\dfrac{1}{a^2+x^2}.$	2)	$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}.$	3)	$\dfrac{x^3}{x^2-4}.$
4)	$\dfrac{4x}{(x-2)^2}.$	5)	$\dfrac{1}{x^2+x+1}.$	6)	$\dfrac{1}{(x^2+2x-1)^2}.$
7)	$\dfrac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}.$	8)	$\dfrac{3x+1}{x^2-2x+10}.$	9)	$\dfrac{1}{x^3+1}.$

Solution - الحـــل

النتائج صالحة في كل مجال من مجموعة التعريف.

The results are valid in every interval of the definition set.

- **$\frac{1}{x^2+a^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

- **$\frac{1}{(1+x^2)^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k.$$

- يمكن كتابة:

We can write:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

ومنه الدالة الأصلية هي:

Then, the primitive function is:

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k.$$

- $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}dx = 4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k.$$

- $\frac{1}{x^2+x+1}$ شكل شهير ومنه الدالة الأصلية هي:

A popular form, including the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

- لدينا التحليل التالي:

We have the following factorization:

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = \frac{1}{8(x+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(x+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(x+1-\sqrt{2})}$$

. الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x-1)^2} = -\frac{x+1}{4(x^2+2x-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}}{x+1-\sqrt{2}}\right| + k.$$

- $\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2-2x+10)} + \frac{2(x-1)}{9(x^2-2x+10)} + \frac{2}{27}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + k.$$

- $\frac{3x+1}{x^2-2x+10}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+10) + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + k.$$

- يمكن كتابة:

We can write:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أحسب التكاملات للدوال الكسرية التالية.

Calculate the integrals for the following rational functions.

$$1)\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}. \quad 2)\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}. \quad 3)\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.$$
$$4)\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}. \quad 5)\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3-7x+6}. \quad 6)\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}dx.$$

Solution - الحــل

- $\frac{1}{x^2+2}$ مشتق شهير للدالة قوس الضل ومنه :

$\frac{1}{x^2+2}$ is a well-known derivative of the arctangent function, including:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- لنحلل الكسر:

Let's decompose the fraction:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

ثم نحسب التكامل:

Then we calculate the integral:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3.$$

- لأن $2x+1$ هي مشتق الدالة x^2+x-3 فإن

Because $2x+1$ is the derivative of the function x^2+x-3, then

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln\left|x^2+x-3\right|\Big]_2^3 = \ln 3.$$

- نستطيع تحليل الكسر بالشكل البسيط:

We can analyze the fraction in the simplest way:

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

لكن الأبسط أن نضع تغيير للمتغير $x^2=u$. نجد:

But the simplest thing is to change the variable $x^2=u$. We find:

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

- بالتحليل نجد:

By factorization, we find:

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$$

حيث

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4).$$

- بالتحليل نجد:

By factorization, we find:

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$$

where   حيث

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

أدرس قيم التكامل التالي

Study the values of the following integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

for every $n > 0$.

1– أثبت أن $0 \le I_{n+1} \le I_n$

Prove that $0 \le I_{n+1} \le I_n$

2– أثبت أن $I_n \le \ln \frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Prove that $I_n \le \ln \frac{n+1}{n}$ *and then conclude that* $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3– أحسب قيمة التكامل

Calculate the value of the integration.

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

Solution - الحل

1– إثبات أن $0 \le I_{n+1} \le I_n$: من أجل كل $0 \le x \le 1$، لدينا $0 < x+n \le x+n+1$ و $\sin(\pi x) \ge 0$، ومنه ، نجد

Prove that $0 \le I_{n+1} \le I_n$: For every $0 \le x \le 1$, we have $0 < x+n \le x+n+1$ and $\sin(\pi x) \ge 0$, then we find

$$0 \le \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \le \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

applying the property of positive integration.

2− من خلال $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ لدينا

Through $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ we have

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

we find نجد

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

Calculate the value of integration 3− حساب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x) = \frac{1}{x+n}$ و $v'(x) = \sin(\pi x)$ ومنه $u'(x) = -\frac{1}{(x+n)^2}$ و $v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ نجد

Let's do an integration by parts, where we put $u(x) = \frac{1}{x+n}$ and $v'(x) = \sin(\pi x)$ and from there $u'(x) = -\frac{1}{(x+n)^2}$ and $v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$. We find

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

It remains for us to find a value

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \le \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \le \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx$$
$$= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.$$

then ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$